

DISEÑO ESTRUCTURAL DE ARCOS,  
BOVEDAS Y CUPULAS EN ESPAÑA  
ca. 1500 ~ca.1800



Universidad Politécnica de Madrid

TESIS

**DISEÑO ESTRUCTURAL DE ARCOS,  
BOVEDAS Y CUPULAS EN ESPAÑA  
ca. 1500 ~ ca.1800**

por

SANTIAGO HUERTA FERNÁNDEZ

dirigida por

RICARDO AROCA HERNANDEZ-ROS

Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid

MADRID, Octubre de 1990



*A mis padres*



*Probado he muchas veces sacar Raçon del estribo que abrá menester una qualquiera forma y nunca hallo regla que me sea suficiente, y tambien le he probado entre arquitectos españoles y estrangeros, y ninguno paresçe alcançar verificada regla, mas de un solo albedrio; y preguntando por que sabremos ser aquello bastante estribo, se responde por que lo ha menester, mas no por que raçon.*  
Rodrigo Gil de Hontañón *Tratado de Arquitectura*

*On fait une voûte d'après les voûtes faites: c'est affaire d'expérience.*  
Paul Sejourné *Grandes Voûtes*



INDICE . . . . .	vii
LISTA DE ILUSTRACIONES . . . . .	xiii
LISTA DE TABLAS . . . . .	xv
PREFACIO . . . . .	xvii
1. INTRODUCCION . . . . .	1
1.1 Desarrollo histórico del análisis de las estructuras de fábrica . . . . .	2
1.1.1 Bóvedas simples: arcos y bóvedas de cañón . . . . .	2
1.1.2 Bóvedas compuestas: cúpulas, bóvedas de crucería y en rincón de claustro . . . . .	10
1.2 Diseño estructural: empleo de reglas empíricas . . . . .	16
1.3 Actitud hacia las reglas empíricas: estado de la cuestión . . . . .	18
1.4 Contradicción entre la actitud actual y los hechos: origen del presente estudio . . . . .	20
1.5 Objetivos y limitaciones . . . . .	22
<b>PRIMERA PARTE: ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA</b>	
2. LOS MATERIALES . . . . .	25
2.1 Las piedras . . . . .	25
2.1.1 Resistencia a compresión . . . . .	26
2.1.2 Resistencia a tracción . . . . .	27
2.1.3 Módulo de Young . . . . .	27
2.2 Ladrillo . . . . .	28
2.2.1 Resistencia a compresión . . . . .	28
2.2.2 Resistencia a tracción . . . . .	29
2.2.3 Módulo de Young . . . . .	29
2.3 Morteros . . . . .	29
2.3.1 Resistencia a compresión . . . . .	29
2.3.2 Resistencia a tracción . . . . .	30
2.3.3 Módulo de Young . . . . .	30
2.4 Resistencia de las fábricas . . . . .	30
2.4.1 Resistencia a compresión . . . . .	31
2.4.1.a Fábricas de piedra . . . . .	32
2.4.1.b Fábricas de ladrillo . . . . .	34
2.4.1.c Tensiones admisibles . . . . .	34
2.4.2 Resistencia a tracción . . . . .	36
2.4.3 Resistencia a cortante . . . . .	36
2.4.4 Módulo de elasticidad . . . . .	38
3. MODELO MATEMATICO: LINEA DE EMPUJES . . . . .	39
3.1 Definición general de las líneas de empujes e inclinaciones . . . . .	39
3.1.1 Línea de empujes . . . . .	40
3.1.2 Línea de inclinaciones de los empujes . . . . .	42
3.2 Teoría matemática de las líneas de empujes . . . . .	43
3.2.1 Definición . . . . .	43
3.2.2 Ecuación general de la línea de empujes bóveda . . . . .	44
3.2.2.a Centro de gravedad de una sección . . . . .	44
3.2.2.b Notaciones . . . . .	46
3.2.2.c Ecuación de la línea de empujes . . . . .	47
3.2.2.d Dirección del empuje . . . . .	49
3.2.3 Bóveda sometida solamente a cargas verticales . . . . .	50

## INDICE

3.2.3.a Familia de planos de corte verticales . . . . .	51
3.2.3.b Polígono funicular . . . . .	52
3.2.3.c Catenaria . . . . .	53
3.3 Propiedades fundamentales de las líneas de empujes de bóvedas sometidas a su propio peso . . . . .	54
4. ANALISIS A ROTURA: TEOREMAS FUNDAMENTALES . . . . .	55
4.1 Posición de la línea de empujes. Inconvenientes del análisis elástico . . . . .	55
4.2 Análisis a rotura . . . . .	58
4.3 Teorías del análisis a rotura: Teoremas fundamentales . . . . .	61
4.3.1 Teoría de Kooharian/Heyman . . . . .	62
4.3.1.a Teoremas fundamentales . . . . .	63
4.3.2 Hipótesis de Parland . . . . .	64
4.3.2.b Teoremas fundamentales . . . . .	65
4.4 Colapso de arcos. Rótulas plásticas. Ensayos sobre modelos . . . . .	68
4.4.1 Colapso por formación de rótulas (Heyman/Kooharian) . . . . .	69
4.4.2 Formas generales de colapso (Parland) . . . . .	71
4.4.3 Conclusiones: crítica de la teoría de Parland y elección de la teoría de Kooharian/Heyman . . . . .	72
4.4.3.a Los contrafuertes . . . . .	74
4.4.3.a Conclusión . . . . .	76
4.5 Aplicación del primer Teorema: comprobación de estabilidad . . . . .	76
4.5.1 Planos de corte verticales . . . . .	77
4.5.2 Forma de acción del relleno . . . . .	78
4.5.2.a Distintas hipótesis . . . . .	78
4.5.2.b Discusión sobre las distintas hipótesis . . . . .	80
4.5.3 Métodos gráficos . . . . .	81
4.5.3.a Método de Méry . . . . .	81
4.5.3.b Método de Fuller/Heyman . . . . .	84
4.5.4 Métodos experimentales: la catenaria y los modelos a escala. . . . .	89

## SEGUNDA PARTE: INVENTARIO DE REGLAS EMPIRICAS

5. EL SIGLO XVI . . . . .	99
5.1 Geometría y estructura en el gótico tardío . . . . .	99
5.2 Rodrigo Gil de Hontañón . . . . .	103
5.2.1 El Tratado de de Rodrigo Gil de Hontañón . . . . .	104
5.2.2 Dimensionamiento estructural de las Iglesias Salón . . . . .	106
5.2.3 Elementos de una bóveda vaída nervada . . . . .	109
5.2.4 Pilares y contrafuertes . . . . .	111
5.2.4.a Pilares . . . . .	111
5.2.4.b Contrafuertes . . . . .	112
5.2.5 Nervios y claves . . . . .	113
5.2.5.a Nervios . . . . .	114
5.2.5.b Claves . . . . .	116
5.2.6 Torres . . . . .	117
5.2.7 Investigación sobre los contrafuertes . . . . .	120
5.2.7.a Reglas 1 y 2. Relación entre contrafuerte y carga . . . . .	121
5.2.7.b Regla 3. Generalización del problema del arco de medio punto . . . . .	126
5.2.7.c Regla 4. Contrafuerte para cualquier arco . . . . .	129
5.2.7.d Regla 5. Fórmula aritmética para el contra- fuerte de un arco de medio punto . . . . .	131

5.3	Martínez de Aranda . . . . .	133
5.3.1	El manuscrito . . . . .	133
5.3.2	Regla para dimensionar contrafuertes y arcos . . . . .	134
5.3.3	Origen, difusión e importancia de la regla de Martí- nez de Aranda . . . . .	136
5.4	Hernán Ruiz . . . . .	140
5.4.1	El manuscrito . . . . .	140
5.4.2	Regla para contrafuertes . . . . .	140
5.4.3	Origen e influencia posterior . . . . .	143
5.5	Leon Baptista Alberti . . . . .	145
5.5.1	Los diez libros de Arquitectura . . . . .	145
5.5.2	Sobre arcos . . . . .	146
5.5.2.a	Arco de medio punto:el arco ideal . . . . .	147
5.5.2.b	Arcos rebajados . . . . .	148
5.5.2.c	Arcos apuntados . . . . .	149
5.5.3	Bóvedas . . . . .	149
5.5.3.a	Esqueleto resistente . . . . .	149
5.5.3.b	Cúpulas esféricas . . . . .	151
5.5.3.c	Cúpulas poligonales . . . . .	151
5.5.3.d	Necesidad de cargar y macizar los riñones de las bóvedas . . . . .	153
5.5.4	Puentes . . . . .	153
5.5.5	Torres . . . . .	156
5.6	Palladio . . . . .	158
5.6.1	Los Cuatro Libros de Arquitectura . . . . .	158
5.6.1.a	Contrafuertes y pilares de las Logias . . . . .	159
5.6.1.b	Puentes . . . . .	159
5.6.2	Logia Publica del Palacio de Brescia . . . . .	161
5.6.2.a	Pilares y contrafuertes . . . . .	162
5.6.2.b	Bóvedas: forma de colapso . . . . .	163
5.6.2.c	Cúpulas: extradós para una cúpula esférica . . . . .	163
5.7	Cristóbal de Rojas . . . . .	164
5.7.1	El tratado . . . . .	164
5.7.2	Regla sobre contrafuertes . . . . .	165
5.7.3	Empleo de modelos . . . . .	165
5.8	Juanelo Turriano . . . . .	166
5.8.1	El manuscrito . . . . .	166
5.8.2	Reglas estructurales . . . . .	167
5.8.2.a	Arcos . . . . .	167
5.8.2.b	Pilas y estribos de los puentes . . . . .	169
5.9	Las comisiones de expertos: la Catedral de Gerona . . . . .	171
5.10	Reglas estructurales del gótico tardío alemán . . . . .	174
5.10.1	Ungewitter: reglas para contrafuertes . . . . .	174
5.10.2	Lechler . . . . .	176
6.	EL SIGLO XVII . . . . .	177
6.1	Fray Lorenzo de San Nicolás . . . . .	177
6.1.1	El tratado . . . . .	177
6.1.2	Reglas estructurales . . . . .	178
6.1.3	Contrafuertes . . . . .	178
6.1.4	Arcos . . . . .	183
6.1.5	Bóvedas: generalidades . . . . .	184
6.1.6	Espesor de las bóvedas . . . . .	186
6.1.7	Estabilidad de las bóvedas . . . . .	186
6.1.7.a	Cañón seguido . . . . .	187

# INDICE

6.1.7.b	Media naranja . . . . .	187
6.1.7.c	Bóveda vahída . . . . .	188
6.1.7.d	Bóveda en rincón de claustro o esquivada. . . . .	188
6.1.7.e	Bóveda de arista. . . . .	189
6.1.7.f	Lunetas . . . . .	190
6.1.8	Puentes . . . . .	190
6.1.8.a	Pilas . . . . .	190
6.1.8.b	Arcos . . . . .	191
6.1.9	Torres . . . . .	192
6.1.10	Empleo de modelos . . . . .	193
6.2	Simón García . . . . .	195
6.2.1	El Tratado . . . . .	195
6.2.2	Reglas estructurales sobre puentes . . . . .	195
6.2.2.a	Sobre las pilas . . . . .	195
6.2.2.b	Sobre los arcos . . . . .	198
6.2.3	Reglas estructurales sobre Templos . . . . .	198
6.2.3.a	Igesias de una nave . . . . .	199
6.2.3.b	Iglesias de tres naves . . . . .	199
6.2.3.c	Iglesia de cinco naves . . . . .	200
6.2.3.d	Otras reglas . . . . .	200
6.2.3	Torres . . . . .	201
6.3	Henry Wotton y Bernardino Baldi . . . . .	201
6.4	Fontana: diseño de cúpulas . . . . .	204
6.4.1	Cúpulas dobles: San Pedro . . . . .	205
6.4.2	Cúpulas simples . . . . .	205
6.4.2.a	Influencia posterior . . . . .	209
6.4.3	Regla superficial . . . . .	210
6.6	Wren: primeras reglas 'pseudo-científicas' . . . . .	212
7.	EL SIGLO XVIII . . . . .	217
7.1	El padre Tosca . . . . .	217
7.1.1	El tratado . . . . .	217
7.1.2	Reglas estructurales . . . . .	218
7.1.3	Arcos . . . . .	219
7.1.3.a	El arco 'ideal' . . . . .	219
7.1.3.b	Arcos de medio punto . . . . .	219
7.1.3.c	Arcos apuntados . . . . .	219
7.1.3.c	Arcos degenerantes . . . . .	220
7.1.4	Bóvedas . . . . .	221
7.1.4.a	Media naranja . . . . .	221
7.1.4.b	Bóvedas de crucería . . . . .	221
7.1.4.c	Cimborrio gótico . . . . .	222
7.1.5	Contrafuertes . . . . .	225
7.1.6	Sobre el empleo de modelos . . . . .	227
	. . . . .	228
7.2	García Berruguilla . . . . .	228
7.2.1	El tratado . . . . .	228
7.2.2	Reglas para contrafuertes . . . . .	228
7.2.3	Torres . . . . .	231
7.3	Plo y Camín . . . . .	232
7.3.1	El tratado . . . . .	232
7.3.2	Reglas sobre contrafuertes de arcos y bóvedas . . . . .	233
7.3.3	Reglas sobre contrafuertes de arcos y bóvedas: pro- puestas de Plo . . . . .	237
7.3.3.a	Contrafuertes para bóvedas de cantería . . . . .	237

7.3.3.b	Contrafuertes para bóvedas de ladrillo . . . . .	239
7.3.3.c	Contrafuertes para puentes . . . . .	240
7.4	La tradición francesa: Gautier, Bélidor, Frézier, Danizy, y Perronet . . . . .	241
7.4.1	Gautier . . . . .	241
7.4.1.a	Contrafuertes . . . . .	244
7.4.1.b	Pilas . . . . .	249
7.4.1.c	Espesor en la clave . . . . .	250
7.4.1.d	Arco ideal . . . . .	252
7.4.2	Danyzy . . . . .	253
7.4.2.a	Regla de Danyzy . . . . .	254
7.4.3	Frézier . . . . .	257
7.4.3.a	Diseño de arcos: espesor de las bóvedas en la clave . . . . .	257
7.4.3.b	Empuje de bóvedas y cálculo de contrafuertes . . . . .	260
7.4.4	Bélidor . . . . .	267
7.4.4.a	Pilas . . . . .	267
7.4.4.b	Contrafuertes o cepas . . . . .	269
7.4.4.c	Espesor en la clave . . . . .	269
7.4.5	Perronet . . . . .	270
7.4.5.a	Arcos . . . . .	271
7.4.5.b	Pilas . . . . .	272
7.4.5.d	Cepas o contrafuertes . . . . .	275
7.4.6	Influencia sobre los tratados españoles del XVIII . . . . .	275
7.4.6.a	El padre Pontones . . . . .	276
7.4.6.b	Rieger . . . . .	279
7.4.6.b	Benito Bails . . . . .	280
7.6	La tradición inglesa: Juan Muller y la escuela de Woolwich . . . . .	281

**TERCERA PARTE: VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS**

8.	VALIDEZ DE LAS REGLAS EMPIRICAS TRADICIONALES . . . . .	285
8.1.	Introducción: Galileo y el Principio de Semejanza . . . . .	285
8.1.1	Efectos de los cambios de escala: el Principio de Semejanza . . . . .	289
8.1.2	Estructuras semejantes . . . . .	290
8.2	Arcos de fábrica . . . . .	291
8.2.1	Peso propio . . . . .	292
8.2.2	Cargas vivas . . . . .	296
8.2.3	Límites de tamaño . . . . .	300
8.2.4	Teorema de la proyección paralela de Rankine . . . . .	303
8.2.5	Reglas empíricas sobre diseño de arcos . . . . .	308
8.2.5.a	Arcos en edificios . . . . .	309
8.2.5.b	Arcos en los puentes . . . . .	314
8.2.6	Reglas sobre contrafuertes . . . . .	315
8.2.6.a	Reglas 1 y 2 de Rodrigo Gil . . . . .	316
8.2.6.b	Contrafuerte para cualquier arco . . . . .	318
8.2.6.c	Contrafuerte para una bóveda de cañón . . . . .	322
8.3	Bóvedas de fábrica . . . . .	325
8.3.1	Bóvedas de crucería . . . . .	326
8.3.1.a	Bóvedas: estabilidad y construcción . . . . .	326
8.3.1.b	Contrafuertes: cálculo, y verificación de reglas empíricas . . . . .	330
8.3.1.c	Límites de tamaño . . . . .	338

## INDICE

8.3.2 Cúpulas . . . . .	339
8.3.2.a Estabilidad de las cúpulas . . . . .	341
8.3.2.b Verificación de algunas cúpulas . . . . .	343
8.3.3 Teorema de Rankine . . . . .	348
8.4 Torres de fábrica . . . . .	349
8.4.1 Reglas empíricas: verificación . . . . .	350
8.4.2 Límites de tamaño . . . . .	352
9. CONCLUSIONES. . . . .	355
APENDICE. Desarrollo histórico del concepto de seguridad en el diseño de arcos de fábrica . . . . .	361
BIBLIOGRAFIA . . . . .	367
Indice de autores. . . . .	457
RESUMENES . . . . .	467

## LISTA DE FIGURAS

1.1.	Análisis de arcos de fábrica . . . . .	4
1.2.	Análisis de cúpulas de fábrica . . . . .	12
3.1.	Líneas de empujes e inclinaciones en un macizo de fábrica . . . . .	41
3.2.	Centro de gravedad de una sección . . . . .	44
3.3.	Línea de empujes . . . . .	47
3.4.	Polígono funicular . . . . .	53
4.1.	Posición de la línea de empujes. Experimento de Barlow . . . . .	55
4.2.	Primeros ensayos de colapso de arcos: Leonardo y Danizy . . . . .	59
4.3.	Los ensayos sistemáticos de colapso de arcos de Boistard . . . . .	60
4.4.	Demostración experimental del primer teorema . . . . .	67
4.5.	Colapso por deslizamiento. Ensayo de Parland . . . . .	68
4.6.	Proporciones de colapso de un arco . . . . .	70
4.7.	Formas de colapso de arcos . . . . .	70
4.8.	Modos generales de colapso . . . . .	71
4.9.	Verificación del ensayo de Parland . . . . .	72
4.10.	Líneas de empuje en arcos adintelados . . . . .	73
4.11.	Terremotos y arcos adintelados: efecto y solución según Cejka . . . . .	73
4.12.	Contrafuerte con empuje horizontal: empujes e inclinaciones . . . . .	74
4.13.	Contrafuerte con empuje inclinado: empleo de pináculos . . . . .	75
4.14.	Influencia de la acción del relleno en la estabilidad . . . . .	79
4.15.	Método de Méry: bóveda simétrica y asimétrica . . . . .	83
4.16.	Degeneración de un polígono funicular . . . . .	85
4.17.	Método de Fuller/Heyman: evolución histórica . . . . .	86
4.18.	Método de Fuller/Heyman: bóveda simétrica y asimétrica . . . . .	88
4.19.	Comprobación de estabilidad empleando la catenaria . . . . .	90
4.20.	Diseño de Hübsch para la katolische Kirche . . . . .	91
4.21.	Ensayos de Hübsch . . . . .	91
4.22.	Arquitecturas catenarias: Tappe y Gaudí . . . . .	92
4.23.	Bóvedas de crucería: empleo de la catenaria . . . . .	93
4.24.	Estudio de la estabilidad de un catedral gótica con modelos . . . . .	96
4.25.	Modelos: comprobación a sismo y viento. Método de Frei Otto . . . . .	97
5.1.	Iglesia salón . . . . .	107
5.2.	Elementos de una bóveda nervada . . . . .	110
5.3.	Relación de analogía entre los dedos de la mano y los nervios . . . . .	114
5.4.	Diseño y proporción de torres . . . . .	119
5.5.	Regla geométrica n°1 para un arco de medio punto . . . . .	121
5.6.	Generalización de la Regla n°1 . . . . .	122
5.7.	Regla n°1. Dibujo original del manuscrito . . . . .	123
5.8.	Regla geométrica n°2 para un arco de medio punto . . . . .	124
5.9.	Regla n°2. Dibujo original del manuscrito . . . . .	126
5.10.	Regla n°3. Dibujo original del manuscrito . . . . .	128
5.11.	Regla n°3. Interpretaciones de Sanabria . . . . .	129
5.12.	Regla n°4. Dibujo original del manuscrito . . . . .	130
5.13.	Martínez de Aranda: dibujos y texto del manuscrito . . . . .	135
5.14.	Equivalencia entre las reglas de M. de Aranda y Derand . . . . .	136
5.15.	Iglesia de Wimpfen (a) y Catedral de Freiburg (b) . . . . .	138
5.16.	Catedral de Gerona (a) e Iglesia Católica de Bulach (b) . . . . .	139
5.17.	Regla de Hernán Ruiz . . . . .	141
5.18.	Regla para los contrafuertes según Ungewitter . . . . .	143
5.19.	Proyecto para el Puente de Westminster . . . . .	144
5.20.	Estabilidad de cúpulas semiesféricas y poligonales . . . . .	151
5.21.	Método constructivo de Brunelleschi para Santa Maria del Fiore . . . . .	152

LISTA DE FIGURAS

5.22.	Restitución de las proporciones de Alberti por Straub . . . . .	.154
5.23.	Modelos de puentes recogidos por Palladio . . . . .	.159
5.24.	Logia de Brescia . . . . .	.161
5.25.	Templo períptero con cúpula . . . . .	.163
5.26.	Aligeramiento de los riñones en los puentes . . . . .	.167
5.27.	Intervalo de variación posible de las pilas de los puentes . . . . .	.169
5.28.	Proporciones de arcos y pilas . . . . .	.169
5.29.	Catedral de Gerona. Planta, sección y vista interior . . . . .	.171
5.30.	Ungewitter: reglas de Martínez de Aranda y Hernán Ruiz . . . . .	.175
5.31.	Arcos transversales y cruceros . . . . .	.176
6.1.	Diseño de puente según Fray Lorenzo . . . . .	.191
6.2.	Planta de torre de iglesia . . . . .	.193
6.3.	Dibujo original del manuscrito . . . . .	.197
6.4.	Restitución hipotética de la geometría . . . . .	.197
6.5.	Relación entre luz y espesor de la pila . . . . .	.197
6.6.	Diseño de cúpulas según Fontana . . . . .	.207
6.7.	Regla para cúpulas simples: restitución de Straub . . . . .	.208
6.8.	Reglas estructurales de Wren (restitución de Dorn) . . . . .	.213
6.9.	Lámina original del tratado de Wren . . . . .	.215
7.1.	Formas de estabilizar un arco apuntado . . . . .	.220
7.2.	Cimborrio de la catedral de Valencia según Tosca . . . . .	.223
7.3.	La regla de Martínez de Aranda en el tratado de Tosca . . . . .	.227
7.4.	García Berruguilla: dibujo original del tratado . . . . .	.230
7.5.	Plo: dibujo original del tratado . . . . .	.235
7.6.	Regla geométrica: contrafuertes de bóvedas de cantería . . . . .	.237
7.7.	Regla para aumentar el canto del contrafuerte . . . . .	.238
7.8.	Regla geométrica: contrafuertes de bóvedas de ladrillo . . . . .	.239
7.9.	Regla geométrica para las cepas de los puentes . . . . .	.241
7.10.	Regla geométrica de Gautier . . . . .	.246
7.11.	Dibujo original de Gautier . . . . .	.246
7.12.	Aplicación de la regla de Gautier a tres tipos de arcos . . . . .	.247
7.13.	Tablas de Gautier para dimensionamiento de puentes . . . . .	.248
7.14.	Dimensionamiento de capas y pilas según Gautier . . . . .	.249
7.15.	Dimensionamiento de arcos según Gautier . . . . .	.251
7.16.	Ensayo de Gautier . . . . .	.252
7.17.	Dibujo original de Danyzy . . . . .	.255
7.18.	Método geométrico de Danyzy . . . . .	.256
7.19.	Dibujo original . . . . .	.256
7.20.	Comprobación de la regla de Martínez de Aranda/Derand . . . . .	.261
7.21.	Comparación de superficies de bóvedas . . . . .	.266
7.22.	Puente de Neuilly de Perronet . . . . .	.273
7.23.	La regla de Martínez de Aranda/Derand en el tratado de Rieger. . . . .	.280
7.24.	Tabla de Muller para el dimensionado de las cepas de los puentes . . . . .	.283
8.1.	Ley de Galileo y su aplicación a una cúpula de fábrica . . . . .	.287
8.2.	Comparación entre la ley de semejanza y la ley de Galileo . . . . .	.287
8.3.	Ley de semejanza en cúpulas romanas . . . . .	.287
8.4.	Comparación de chimeneas de distintos tamaños . . . . .	.288
8.5.	Comparación de puentes de distintos tamaños . . . . .	.288
8.6.	Diseño de un arco semicircular: métodos elástico y a rotura . . . . .	.293
8.7.	Diseño elástico y a rotura de un arco . . . . .	.294
8.8.	Posición del punto crítico para dos tipos de arcos . . . . .	.295
8.9.	Esbeltez crítica de un arco con carga puntual en su clave . . . . .	.298
8.10.	Reglas empíricas para dimensionamiento de puentes de fábrica . . . . .	.300
8.11.	Proyecto de Leonardo para un puente sobre el Cuerno de Oro . . . . .	.302
8.12.	Proyecciones paralelas de Rankine . . . . .	.306

LISTA DE FIGURAS

8.13.	Proyecciones paralelas de un arco de medio punto . . . . .	307
8.14.	Proyecciones paralelas de un bóveda de cañón . . . . .	307
8.15.	"Demostración" gráfica del Teorema de Rankine . . . . .	307
8.16.	El teorema de Rankine y la <i>Arquitectura oblicua</i> de Caramuel. . . . .	308
8.17.	Esbelteces y formas de colapso de los tres arcos básicos . . . . .	309
8.18.	Esbelteces límite de arcos circulares. . . . .	310
8.19.	Efecto de levantar los contrafuertes hasta la mitad de la flecha . . . . .	311
8.20.	Esbeltez límite de un arco semicircular: efecto del relleno. . . . .	311
8.21.	Líneas de carga de distintos tipos de arcos. . . . .	313
8.22.	Método para estabilizar un arco apuntado . . . . .	314
8.23.	Verificación de la Regla n°1 de Rodrigo Gil. . . . .	317
8.24.	Verificación de la Regla n°2 de Rodrigo Gil. . . . .	317
8.25.	Geometría de la serie de arcos considerada . . . . .	319
8.26.	Esbeltez del contrafuerte para distintos arcos . . . . .	319
8.27.	Verificación de las reglas para el contrafuerte de un arco . . . . .	320
8.28.	Contrafuerte para un arco de medio punto exento. . . . .	321
8.29.	Contrafuerte para un arco de medio punto: relleno horizontal . . . . .	321
8.30.	Bóveda de cañón con estribos: validez de la regla de Rodrigo Gil . . . . .	324
8.31.	Bóveda de cañón con estribos: validez de la regla de Plo y Camín . . . . .	324
8.32.	Posibles formas de bóvedas de crucería . . . . .	326
8.33.	Curvatura de las plementerías en las bóvedas de crucería . . . . .	327
8.34.	Colapso de una bóveda de crucería. . . . .	330
8.35.	Grietas de Sabouret y modelo de colapso según Heyman . . . . .	331
8.36.	Bóveda de crucería: parámetros geométricos para el cálculo . . . . .	332
8.37.	Contrafuerte bóveda de crucería: directriz semicircular. . . . .	333
8.38.	Contrafuerte bóveda de crucería: directriz apuntada, $F/L = 2/3$ . . . . .	333
8.39.	Contrafuerte bóveda de crucería: directriz apuntada, $F/L = 5/6$ . . . . .	334
8.40.	Viento: efecto en la estabilidad de la Catedral de Estrasburgo . . . . .	335
8.41.	Contrafuertes para una bóveda baída (sin muro). . . . .	336
8.42.	Contrafuertes para una bóveda baída (con muro). . . . .	337
8.43.	Tensiones máximas en bóvedas de crucería . . . . .	338
8.44.	Modo de colapso y esbeltez límite de cúpulas esféricas . . . . .	342
8.45.	Verificación de la regla de Fontana. . . . .	344
8.46.	Verificación de la estabilidad de la Cúpula de Bramante. . . . .	344
8.47.	Verificación de la estabilidad de Santa Maria del Fiore. . . . .	346
8.48.	Proyecto para una cúpula de ladrillo de 100 m de luz . . . . .	346
8.49.	Cúpula del Gol Gomuz en Bijapur. . . . .	347
8.50.	Estabilidad de torres cuadradas de fábrica . . . . .	351



## LISTA DE TABLAS

2.1. Resistencias mecánicas de las piedras . . . . .	26
2.2. Módulo de Young de los morteros . . . . .	30
2.3. Resistencia de las fábricas en función del tipo de mortero . . . . .	32
2.4. Resistencia de los morteros tipo . . . . .	37
2.5. Resistencia de las fabricas de ladrillo según MV-201 . . . . .	34
2.6. Tensiones de trabajo en estructuras de fábrica . . . . .	35
2.7. Módulo de elasticidad de las fábricas (*10 <sup>5</sup> Kg/cm <sup>2</sup> ) . . . . .	38
5.1. Espesores de arcos según Martínez de Aranda . . . . .	135
5.2. Reglas proporcionales de Alberti para las Torres . . . . .	157
6.1. Dimensiones de los contrafuertes . . . . .	182
7.1. Espesores de las pilas para los arcos de medio punto . . . . .	267
7.2. Espesores de las pilas para los arcos rebajados al tercio . . . . .	268
8.1. Grandes puentes de fábrica. . . . .	295
8.2. Grandes bóvedas de crucería . . . . .	339
8.3. Grandes cúpulas de fábrica. . . . .	347



## PREFACIO: HISTORIA DE LA CONSTRUCCION

El ámbito de esta Tesis es la Historia de la Construcción. En la actualidad existe un debate sobre la definición de esta materia. La tendencia actual es a darle un campo, en mi opinión, demasiado amplio que abarcaría todo el 'universo construido'<sup>1</sup>. Estas definiciones tan amplias son cómodas desde un punto de vista puramente teórico pues cubren todo el campo sin excepciones, pero tienen el inconveniente de solaparse con otras disciplinas con un ámbito ya reconocido como son la Historia y Teoría de la Arquitectura, la Historia del Urbanismo etc. Otra tendencia consiste en emplear la actual división existente en las Escuelas Técnicas desde su fundación y que separa la Arquitectura de la Ingeniería.<sup>2</sup> Esto es difícilmente justificable pues impone una clasificación que sólo es válida para los últimos 150 años. ¿Dónde se estudiarían, por ejemplo, las aportaciones a la técnica constructiva de Palladio ó Miguel Angel?

Quizá el ámbito quedara mejor definido con la expresión Historia de la Técnica de la Construcción, que incluiría tanto las obras de arquitectura como las de ingeniería civil. Este enfoque coincide con la clasificación realizada tradicionalmente en los tratados, enciclopedias y libros de referencia sobre Historia de la Técnica.<sup>3</sup>

---

1. El término corresponde a J. Summerson "What is the History of Construction?" *Construction History* Vol.1, 1985. pp. 1-2. Creemos que un ejemplo de los peligros de un enfoque demasiado amplio es el artículo de M. B. K. Dunkeld "Approaches to Construction History." *Construction History* Vol.3, 1987. pp. 3-15, basado en su tesis: "Approaches to Construction History." MSc Thesis: University College, 1986.

2. Para una propuesta de esta orientación, véase: G. Schäfer, "Der Begriff Ingenieurbaugeschichte. Ein Beitrag zur Geschichte des Bauingenieurwesens.", *Bauingenieur*, Vol. 60, 1985, págs. 169-172.

3. Para la estructura de estas obras, véase: J. Stummvoll, *Technikgeschichte und Schrifttum. Kurze Einführung in die Probleme der Geschichte der Technik und bibliographische Dokumentation der Fachliteratur.* Wien: Österreichisches Institut für Bibliothekforschung, 1975.

## PREFACIO

### Desarrollo de la Historia de la Construcción:

La Historia de la Construcción tiene un origen muy antiguo. Ya Vitruvio reconoce haberse basado para su Tratado de Arquitectura en las obras de los tratadistas griegos de una época anterior a la suya<sup>4</sup>. Sabemos también que Brunelleschi realizó estudios sobre los métodos constructivos y formas estructurales de los antiguos romanos<sup>5</sup>. La tratadística de los siglos XVI y XVII deja sentir la influencia de Vitruvio en muchos aspectos técnicos.

En el siglo XVIII se publicaron los primeros trabajos específicos: Winckelmann, sobre la estructura de los edificios romanos, y Ziegler, sobre la constitución y propiedades de los morteros y los hormigones, también en la Roma clásica<sup>6</sup>.

Los tratados de arquitectura del siglo XIX incluían numerosos apartados sobre historia de la construcción, en particular en lo que se refiere al estudio de las grandes obras del pasado como el Panteón, Santa Sofía, Santa María del Fiore o San Pedro. El más representativo de todos ellos es el de Rondelet<sup>7</sup>, pero el mismo enfoque puede verse en tratados posteriores como los de Breymann<sup>8</sup> y Gottgetreu<sup>9</sup>.

---

4. En el Proemio del Libro II, Vitruvio, después de citar numerosos autores griegos, en lo que podría considerarse como la primera bibliografía de tratados de arquitectura, dice: "...de cuyas obras he tomado y reducido a un cuerpo lo perteneciente a la Arquitectura, movido de ver tantos libros de esta facultad entre los Griegos, y tan pocos latinos." *Los diez libros de Arquitectura traducidos del latín y comentados por D. Joseph Ortiz y Sanz*. Madrid: Imprenta Real, 1787, pp. 161-165.

5. P. Murray *Arquitectura del Renacimiento* (Madrid: Aguilar, 1972), p. 10: "No puede dudarse razonablemente que Brunelleschi estudió la ciencia estructural de los romanos y la aplicó a las circunstancias de su época...". A continuación cita el siguiente fragmento de la *Vita di Brunellescho*: "...levantó croquis de casi todos los edificios de Roma, y de muchos lugares de sus alrededores, con medidas de su anchura y altura... y en muchos sitios hacían excavar para ver y comparar los elementos de los edificios... y anotaban en tiras de pergamino cuadrículadas, con números y caracteres que Filippo entendía...".

6. J.J. Winckelmann "Anmerkungen über die Baukunst der Alten." *Studien zur Deutschen Kunstgeschichte*, Vol. 337, 1762; C.L. Ziegler "Beantwortung über die Preisfrage über die Ursachen der Festigkeit alter römischer und gotischer Gebäude und die Mittel, gleiche Festigkeit bei neuer Mauerwerken zu erhalten." Berlin: 1776.

7. J. Rondelet, J. *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*. Paris: Chez l'auteur, 1802-1810. 6 vols. Este tratado tuvo numerosas reediciones a lo largo del siglo XIX.

8. G. A. Breymann *Allgemeine Baukonstruktionslehre mit besonderer Beziehung auf das Hochbauwesen*. Leipzig: J. M. Gebhardt's Verlag, 1868. 4 vols.

En la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX, aparecen los grandes Tratados de Historia de la Construcción: Viollet-le-Duc<sup>10</sup> sobre la construcción gótica, Choisy<sup>11</sup> sobre la construcción en Roma y Bizancio, y Durm<sup>12</sup> sobre la construcción en Roma y en el Renacimiento Italiano. En este período se produce una recopilación de todos los conocimientos sobre la construcción de edificios de fábrica y, además de los tratados específicos antes citados, existen multitud de publicaciones en revistas así como Enciclopedias, que constituyen una mina de información, aún no debidamente inventariada ni explotada, sobre los procedimientos tradicionales de construcción.

En la primera mitad de este siglo, en particular a partir de la primera guerra mundial el interés por la Historia de la Construcción desciende hasta casi desaparecer, para renovarse a partir de los años 50. Junto a tratados de corte clásico como los de Blake<sup>13</sup> y Lugli<sup>14</sup>, ambos sobre la técnica de construcción romana, se produce una proliferación de estudios y monografías sobre aspectos muy concretos directamente relacionados con la historia de la técnica de la construcción (como puede comprobarse en la bibliografía final, apartado C.3). Aparentemente no existe, sin embargo, la conciencia de estar trabajando en un ámbito común; los artículos aparecen dispersos en revistas y congresos de arqueología, historia medieval, ingeniería, historia de la técnica, histo-

---

9. R. Gottgetreu, R. *Lehrbuch der Hochbaukonstruktionen*. Berlin: Verlag von Wilhem Ernst und Sohn, 1880-1888. 6 vols.

10. E. E. Viollet-le-Duc, *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI<sup>e</sup> au XVI<sup>e</sup> siècle*, Paris, Librairies-Imprimeries Réunies, 1858-68. 10 vols.

11. A. Choisy, *L'Art de bâtir chez les Romains*. Paris: Librairie de la Société Anonyme de Publications Périodiques, 1872; y A. Choisy, *L'Art de bâtir chez les Byzantines*. Paris: ídem, 1883.

12. J. Durm, *Die Baukunst der Etrusker. Die Baukunst der Römer*. (Handbuch der Architektur, Teil 2, Bd.2) Stuttgart: Alfred Kröner, 1905.

13. M. E. Blake *Ancient Roman Construction in Italy from the Prehistoric Period to Augustus*. Washington: 1947; *Roman Construction in Italy from Tiberius through the Flavians*. Washington: 1959; y *Roman Construction in Italy from Nerva through the Antonines*. Philadelphia: 1973.

14. G. Lugli *La tecnica edilizia romana, con particolare riguardo a Roma e Lazio*. Roma: 1957.

## PREFACIO

ría del arte y de la arquitectura, etc..., y, con demasiado frecuencia, se ignoran trabajos ya existentes relevantes dentro del ámbito de la publicación en cuestión.

La Historia de la Construcción ha empezado a perfilarse como una disciplina independiente en esta década de los ochenta. Una investigación bibliográfica de las contribuciones que pueden ser adscritas a esta disciplina muestra un crecimiento constante de la literatura en los últimos años. Por otro lado, en la literatura de referencia ha empezado a aparecer como un campo independiente, con su correspondiente 'keyword' o palabra clave, cosa que no ocurría con anterioridad. Por último, y lo que es más importante, han aparecido sociedades y revistas dedicadas específicamente a este campo. Merece destacarse en primer lugar, en Inglaterra, el "Construction History Group", creado en 1984 y que publica desde 1985 el *Journal of Construction History*. Más recientemente, en los EE.UU., en la *Society for the History of Technology*, ha sido creado en 1988 un grupo dedicado específicamente a promover este tipo de estudios, el "Building Technology and Civil Engineering Interest Group".

La Historia de la Construcción no ha alcanzado todavía un nivel universitario pleno, en el sentido de que, si bien se realizan numerosas tesis y cursos de doctorado en todo el mundo dentro de este ámbito, no existen en la actualidad (o, al menos, no de una forma generalizada) cátedras o departamentos universitarios sobre historia de la construcción. En este sentido la situación de la Historia de la Construcción en la actualidad es parecida a la de la Historia de la Ciencia a principios de siglo y a la de la Historia de la Técnica en el período de entreguerras<sup>15</sup>.

La presente Tesis pretende contribuir a la formación y difusión de esta disciplina que no sólo puede aportar datos como 'ciencia auxiliar', *Hilfswis-*

---

15. Véase J. Stummvoll, *Technikgeschichte und Schrifttum...*, op. cit., pp. 5-10.

*senchaft*, a otros campos ya consolidados como la Teoría e Historia de la Arquitectura, o la Restauración y Rehabilitación de edificios, sino que merece por su propio interés y amplitud formar un ámbito específico de estudio.

**AGRADECIMIENTOS:** Desearía expresar mi agradecimiento a Ricardo Aroca, Catedrático de Estructuras de la ETSAM, que aceptó dirigir esta Tesis, y que en los años que ha durado su elaboración, me ha estimulado y ayudado, y ha estado siempre disponible para comentar cualquier aspecto relacionado con ella. Javier Ordóñez, Profesor de Historia de la Ciencia de la UAM, ha dedicado una parte sustancial de su estancias en Munich a procurarme una parte importante de las referencias alemanas. Aún a riesgo de olvidarme de alguien, me gustaría citar a continuación a las personas que me han prestado su ayuda en diversas ocasiones: Antonio Azcona, Jaime Cervera, Enrique Domínguez, Fernando Espuelas, Elisenda Galcerán, Paco Jurado, Alex Martin, Nati, Paul en Munich, Salvador Pérez Arroyo, Luis Villanueva.

Berbabé y Miguel, de la Biblioteca de la ETS de Caminos, me han facilitado extraordinariamente la consulta y el manejo de los riquísimos fondos de esta Biblioteca. Sin su colaboración, no habría podido consultar en un tiempo razonable una buena parte de la literatura que se cita en la bibliografía. Mis amigos del grupo AZOCH Arquitectura me han permitido usar, y abusar, de su fotocopidora, lo que ha sido fundamental en el manejo de la información gráfica. Por último, me gustaría señalar que sin el apoyo incondicional a lo largo de estos últimos cuatro años de mis amigos, de mi familia y de Mónica, no creo que hubiera podido dar término a este trabajo.



## Introducción



## 1. INTRODUCCION

Las estructuras abovedadas de fábrica constituyen una parte fundamental del patrimonio arquitectónico del pasado. De hecho, este tipo de construcción fue el dominante hasta la aparición del hierro como alternativa viable en la segunda mitad del siglo XIX<sup>1</sup>.

A pesar de ello, los estudios históricos sobre este tipo estructural son muy escasos. Este sorprendente hecho quizá se deba a que la historia del análisis de estructuras se inicia en la etapa de apogeo del empleo del hierro y del consiguiente desarrollo de la teoría de la elasticidad. Como consecuencia de ello, las estructuras de fábrica apenas se tratan, y, en muchos casos, se ignoran casi por completo<sup>2</sup>.

Parece, pues, necesario para centrar el tema de este ensayo realizar una breve descripción del desarrollo histórico del diseño y análisis de las estructuras de fábrica, desde sus inicios en el siglo XVII, hasta su estado actual<sup>3</sup>.

---

1. Esta época marca el comienzo de una lenta decadencia que se aceleró con la aparición del hormigón armado y culminó en el período de entreguerras de este siglo.

2. Por ejemplo la obra enciclopédica de I. Todhunter y K. Pearson *A history of the theory of elasticity...* 3 vols., Cambridge: 1886-1893, escrita entre 1870 y 1880, ignora por completo el tema de los arcos de fábrica, lo que ha tenido una influencia indudable en posteriores estudios. Véase este sentido los comentarios de H. I. Dorn "The Art of Building and the Science of Mechanics: A Study of the Union of Theory and Practice in the Early History of Structural Analysis in England." Ph.D. Princeton University, 1970, pp. 39-42. Un reciente estudio con el mismo enfoque 'elástico', prácticamente ignorando la teoría del arco de fábrica, es el de T. M. Charlton *A history of theory of structures in the nineteenth century*. Cambridge: 1982.

3. Todavía hoy la mejor exposición del desarrollo del análisis de estructuras de fábrica es el ensayo de J.V. Poncelet "Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes." *Comptes rendues de l'Académie des Sciences (Paris)*, Vol. 35, Nº17, 1852 2me sem., pp. 494-502, 531-540 y 577-587. Véanse también: G.C. Mehlertens *Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen*. Leipzig: 1903-5, Vol. I, pp. 242-255; A. Hertwig "Die Entwicklung der Statik der Baukonstruktionen im 19. Jahrhundert." *Technikgeschichte*, Vol. 30, 1941, pp. 82-98; S.P. Timoshenko *History of the Strength of Materials*, New York: 1953, pp. 62-66, 83-87; J. Heyman *Coulomb's Memoir on Statics. An Essay in the History of Civil Engineering*. Cambridge: 1972, pp. 162-189; E. Benvenuto *La Scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*, Milano: 1981, pp. 323-392; y J. Heyman *The Masonry Arch*, Chichester: 1982, pp. 44-62.

## INTRODUCCION

### 1.1 Desarrollo histórico del análisis de las estructuras de fábrica

#### 1.1.1 Bóvedas simples: arcos y bóvedas de cañón

El nacimiento del análisis de las estructuras abovedadas de fábrica se produce a finales del siglo XVII de forma prácticamente simultánea aunque independiente en Inglaterra y Francia.

En Inglaterra es Robert Hooke quien plantea en primer lugar el problema del arco, y propone la catenaria como figura ideal. Parece probado que Hooke trabajó con Wren en el proyecto de la cúpula de San Pablo que está diseñada bajo este principio<sup>4</sup>. Más tarde, Gregory<sup>5</sup> formula con sorprendente precocidad la condición de estabilidad de un arco<sup>6</sup>. Stirling<sup>7</sup> recoge las ideas de Gregory. Su obra es importante puesto que inspiró la solución de Poleni, empleando la catenaria, para la cúpula de San Pedro, de la que hablaremos más adelante al tratar las bóvedas compuestas.

En Francia, Philippe de la Hire publica en 1695 su *Traité de Mécanique*<sup>8</sup>, donde se aborda el problema de cual ha de ser el peso de las dovelas para mejorar la estabilidad del arco, primera aplicación del polígono funicular al problema del arco. El estudio se basa en la hipótesis de ausencia de rozamiento entre las dovelas; esto lleva a resultados absurdos como que un arco semi-

---

4. Véase sobre la contribución de Hooke y su, más que probable, colaboración con Wren, H. I. Dorn "The Art of Building and the Science of Mechanics...", op. cit. más arriba, pp. 107-121, y R. Graefe "Zum Formgebung von Bögen und Gewölben." *Architectura*, Vol. 16, 1986, pp. 50-67.

5. D. Gregory "Catenaria." *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. 19, N° 231, 1697, pp. 397-, y "Responsio ad animadversionem ad Davidiis Gregorii Catenariam." *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. 21, N° 259, 1699, pp. 419-26.

6. "...none but the catenaria is the figure of a true legitimate arch, or fornix. And when an arch of any other figure is supported, it is because in its thickness some catenaria is included. Neither would it be sustained if it were very thin, and composed of slippery parts...". Traducido por Samuel Ware *A treatise of the properties of arches, and their abutments piers*, London: 1809 y citado por J. Heyman Coulomb's *Memoir on Statics...*, op. cit. más arriba, pp. 75-76.

7. J. Stirling *Lineae Tertii Ordinis Neutoniana...* Oxford: 1717.

8. P. de La Hire *Traité de Mécanique, ou l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des Arts, et les propriétés des corps pesants lesquelles ont eu plus grand usage dans la Physique*. Paris: Imprimerie Royale, 1695.

circular para ser estable precisaría de una carga infinita en su base. La Hire era consciente de ello: "...il n'est pas besoin de garder la proportion qu'on vient de déterminer pour la charge des voussoirs dans toute la rigueur, il suffit d'y avoir égard."<sup>9</sup>

En 1712 publica su memoria "Sur la construction des voûtes dans les edifices"<sup>10</sup>, donde establece un procedimiento para calcular los contrafuertes de los arcos, basándose en la hipótesis de colapso por deslizamiento en 'cuña'. El modo de colapso es incorrecto pero los resultados van siempre a favor de seguridad<sup>11</sup>. Esta memoria ha ejercido una enorme influencia en las posteriores contribuciones, fundamentalmente porque Bélidor adoptó este método y lo aplicó a un gran número de casos particulares en sus obras dedicadas a la ingeniería<sup>12</sup>. Posteriormente Perronet y Chezy<sup>13</sup> lo emplearon en la confección de unas Tablas para el cálculo de los arcos de los puentes que tuvieron una gran popularidad tanto en Francia como en el resto de Europa<sup>14</sup>.

---

9. P. La Hire *Traité de Mécanique...*, op. cit. pág. 470. Las observaciones de La Hire tuvieron una gran influencia en el diseño de arcos, apareciendo el arco de sección variable, presentando la sección mínima en la clave y creciendo hasta alcanzar el máximo en los arranques. Véanse en este sentido las observaciones de A.F. Frézier en su libro *La théorie et la pratique de la coupe de pierres...* 3 vols, Paris: 1737-39, vol I, pp. 96-104, que gozó de extraordinaria difusión.

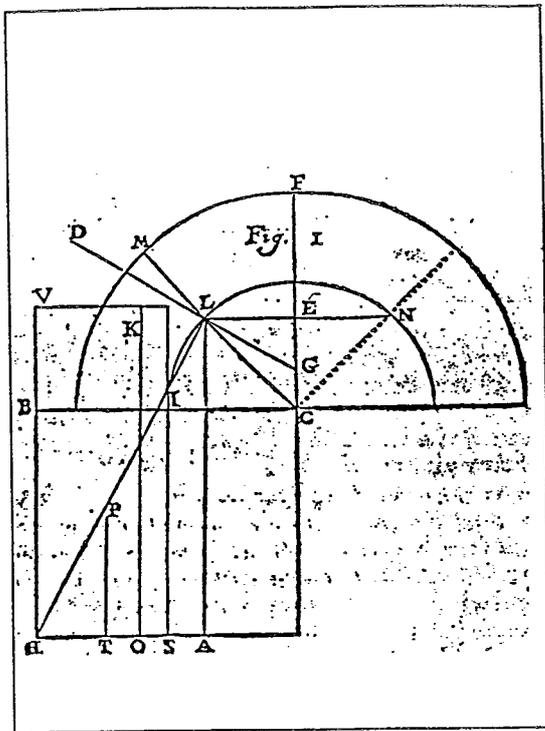
10. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1712, pp. 70-78.

11. Para un examen detallado del método de La Hire véase: E. Benvenuto, *La Scienze della Costruzione*, op. cit., pp. 326-332.

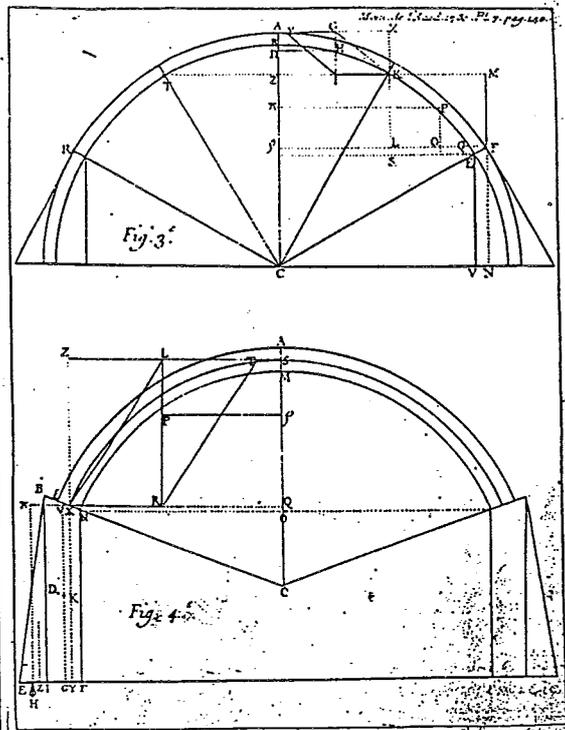
12. B.F. Bélidor *Nouveau cours de Mathématique a l'Usage de l'Artillerie et du Génie...* Paris: 1725, donde aparecen las primeras tablas para cálculo de los contrafuertes de los arcos según el método de La Hire. Pero su obra más influyente es *La Science des Ingenieurs...* Paris: 1729, donde dedica a este tema el libro segundo 'Qui traite de la mécanique des Voûtes, pour montrer la manière de déterminer l'épaisseur de leurs piédroits.' En él, desarrolla la teoría de La Hire con gran extensión aplicándola a numerosos casos prácticos y distintos tipos de bóvedas.

13. J. R. Perronet y Chezy "Formule générale pour déterminer l'épaisseur des piles et culées des arches des ponts, soit qu'elles soient en plein cintre ou surbaissées." *Recueil de divers mémoires extraits de la bibliothèque impériale des ponts et chaussées a l'usage de MM. les ingénieurs*, editado por P. Lesage. Paris: 1810. Vol.2, pp. 243-273, lám. XVII. Las tablas fueron calculadas por Perronet alrededor de 1750.

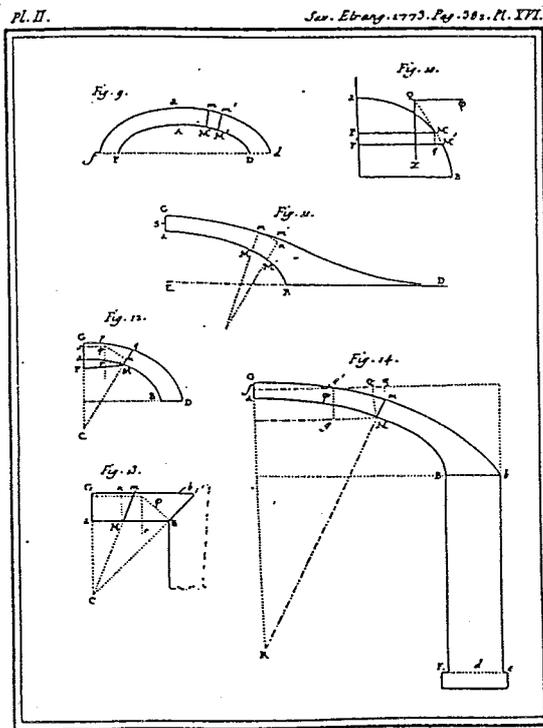
14. Aparecen incluidas en numerosos tratados de construcción hasta la mitad del siglo XIX. Por ejemplo: J. M. Sganzi *Programme ou résumé des leçons d'un cours de constructions...* 2 vols. Liege: 1840-44, y J. A. Borgnis *Traité élémentaire de construction...*, Paris: 1838.



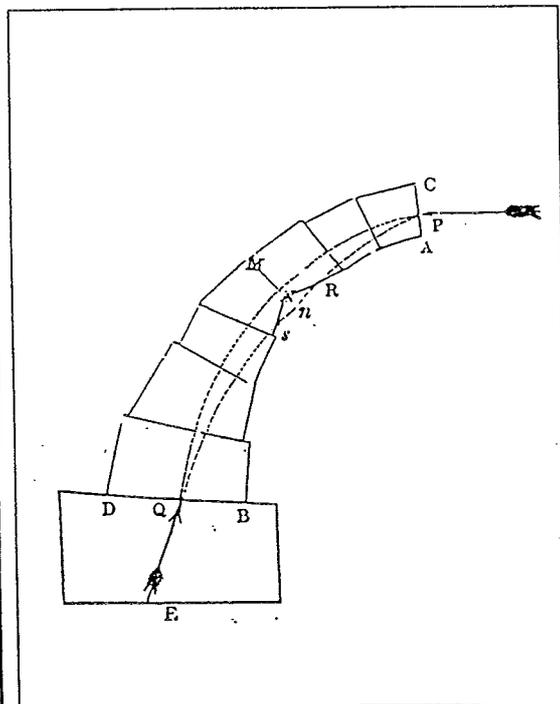
(a) LA HIRE 1712



(b) COUPLÉT 1730



(c) COULOMB 1773



(d) MOSELEY 1835

**Figura 1.1. Análisis de arcos de fábrica.** Ilustraciones de cuatro de las memorias más importantes: (a) La Hire "Sur la construction des voûtes dans les édifices.", 1712; (b) Couplet "Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes.", 1730; (c) Coulomb "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture.", 1773; (d) Moseley "On the equilibrium of the arch.", 1835.

No obstante, aunque la hipótesis de La Hire daba muy buenos resultados prácticos, era evidente que el colapso de los arcos no se producía por deslizamiento, sino por vuelco, como lo demostraban la ruina de algunas bóvedas y los ensayos sobre modelos. Sin embargo, los buenos resultados prácticos y la sencillez del modelo matemático hicieron que las hipótesis de ausencia de rozamiento y de la cuña tuvieran una pervivencia de más de un siglo<sup>15</sup>.

En 1730 Couplet publica sus memorias sobre la estabilidad de las bóvedas<sup>16</sup>, en la segunda de las cuales aparece por primera vez el modo correcto de colapso de los arcos por formación de un mecanismo de cuatro barras. Danyzy<sup>17</sup> fue el primero en demostrar este mecanismo mediante ensayos sobre modelos. Gauthey<sup>18</sup> realizó también ensayos con idéntico resultado, que Boistard<sup>19</sup> repitió con modelos a gran escala (arcos de 2 m de luz), considerándose a partir de entonces como definitivos. Por fin, en 1776 Coulomb<sup>20</sup>, en una contribución genial por su sencillez y claridad, 'resuelve' el problema de la teoría de la estabilidad de los arcos de fábrica, estableciendo la base matemática de los distintos modos de colapso posibles.

---

15. En la obra de Eytelwein Handbuch der Statik fester Körper, 3 vols., 1808-1809, la estabilidad de las bóvedas se estudia todavía según la hipótesis de La Hire. Citado por C. Mehrtens *Vorlesungen über Statik...*, op. cit., Vol. 2, pág. 243.

16. P. Couplet "De la poussée des voûtes." *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1729. pp. 79-117, lám. 4-7, y, "Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes." *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Paris*, 1730. pp. 117-141, lám. 6-7. Para un análisis de su contenido e implicaciones véase J. Heyman "Couplet's Engineering Memoirs, 1726-33." *History of Technology* Vol.1, 1976. pp. 21-44.

17. A. A. H. Danyzy "Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer à la poussée des voûtes." *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier* Vol.2, 1732 (Lyon 1778). pp. 40-

18. E. M. Gauthey *Dissertation sur les dégradations survenues aux piliers du dome de Panthéon Français, et sur les moyens d'y remédier*. Paris: Perronneau Imprimeur, 1798, y *Traité de la construction des ponts*. (editada por Navier) 3a ed. 2 vols. Liège: A. Leroux, 1845.

19. L. C. Boistard "Expériences sur la stabilité des voûtes." *Recueil de divers mémoires...*, ed. por P. Lesage. Paris: Chez Firmin Didot, 1810. Vol.2, pp. 171-217, lám. XI-XVI.

20. C. A. Coulomb "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture." *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Savants et lus dans ses Assemblées (Paris)* Vol.7, 1773. pp. 343-382.

## INTRODUCCION

La teoría de Coulomb, extraordinariamente sintética y desprovista de ejemplos de aplicación, tarda en ser asimilada. En 1820, casi 50 años más tarde, Audoy<sup>21</sup> la redescubre y desarrolla la teoría para la obtención de fórmulas de aplicación práctica; éstas tienen todavía una expresión matemática excesivamente complicada. En 1835, Garidel<sup>22</sup> y Petit<sup>23</sup>, y en 1840 Michon<sup>24</sup>, publican Tablas para calcular los contrafuertes de distintos tipos de arcos evitando así penosos tanteos. También en 1835 Poncelet<sup>25</sup> desarrolla un método gráfico que, aunque no desprovisto de cierta complejidad supone un considerable ahorro de tiempo.

Por otro lado, entre 1830 y 1840 de forma casi simultánea e independiente Gertsner<sup>26</sup> en Alemania, Méry<sup>27</sup> en Francia y Moseley<sup>28</sup> en Inglaterra formulan el concepto de línea de empujes que, como veremos, es una herramienta utilísima a la hora de establecer la estabilidad de los arcos de fábrica. El tratamiento de Moseley es altamente matemático; por el contrario Méry desarrolló un procedimiento de tanteo gráfico extraordinariamente sencillo y que, Sejourné todavía en 1910 consideraba como muy adecuado para el estudio de la

---

21. Audoy "Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau." *Mémorial de l'Officier du Génie* n°4, 1820. pp. 1-96, láms. I-VI

22. Garidel "Mémoire sur le calcul des voûtes en berceau." *Mémorial de l'Officier du Génie* n°12, 1835. pp. 7-72, lám. I

23. Petit "Mémoire sur le calcul des voûtes circulaires." *Mémorial de l'Officier du Génie* n°12, 1835. pp. 73-150

24. Michon "Tables et formules pratiques pour l'établissement des voûtes cylindriques." *Mémorial de l'Officier du Génie* n°15, 1848. pp. 7-117, lám. I

25. J. V. Poncelet "Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voûtes." *Mémorial de l'Officier du Génie* n°12, 1835. pp. 151-213, lám. III

26. Gertsner *Handbuch der Mechanik*. Praga: 1831. Citado por C. G. Mehrrens *Vorlesungen...*, op. cit. Vol. I, pág. 246.

27. Méry, E. "Mémoire sur l'équilibre des voûtes en berceau." *Annales des Ponts et Chaussées*, 1840. pp. 50-70, planches 133-134. Según J. Dupuit *L'Equilibre des voûtes...* Paris: 1870, pág. 118, el manuscrito de Méry data de 1827.

28. H. Moseley "On the equilibrium of the arch." *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. 5, 1835, pp. 293-313 (leída el 9 de diciembre de 1833), y "On the theory of the equilibrium of a system of bodies in contact." *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. 6, 1838, pp. 293-313 (leída el 15 de mayo de 1837).

estabilidad de los arcos<sup>29</sup>. El método de las líneas de empujes fue perfeccionado posteriormente por Carvallo<sup>30</sup> y Durand-Claye<sup>31</sup> en sendas memorias.

Persistía, sin embargo, el problema de la indefinición en la posición de la línea de empujes, y en la primera mitad del siglo XIX numerosas teorías sobre bóvedas trataron de fijar la posición de la 'verdadera' línea de empujes. Moseley<sup>32</sup> empleó el Principio de la Mínima Resistencia que posteriormente Scheffler<sup>33</sup> desarrolló y aplicó a numerosos casos particulares. Culmann<sup>34</sup> intentó también determinar su posición utilizando el 'Prinzip der kleinsten Beanspruchung', que establecía que de todas las líneas posibles la verdadera es la que más se acercaba a la línea media del arco.

Se intentaron también otras soluciones 'escapistas'. La primera de ellas fue la de hacer coincidir la directriz del arco con una de las líneas de empujes producidas por la carga permanente. Este enfoque, desarrollado por primera vez por Yvon Villarceau<sup>35</sup> y Hagen<sup>36</sup>, tuvo gran aceptación sobre todo

---

29. P. Sejourné *Grandes Voûtes. 6 vols.* Bourges: 1913-1916. Vol.3, pág. 372: "Pour une très grande voûte, il est plus sûr, plus clair, de construire ses courbes de pression, puis de tracer un intrados et un extrados qui les encadrent au mieux."

30. Carvallo "Étude sur la stabilité des voûtes." Estabilidad de las bóvedas. *Annales des Ponts et Chaussées* Vol.1, 1853, 2e. sem.. pp. 1-77.

31. A. Durand-Claye "Sur la vérification de la stabilité des voutes en maçonnerie et sur l'emploi des courbes de pression." *Annales des Ponts et Chaussées*, 1867. pp. 63-96, lám. 132-133 y "Vérification de la stabilité des voûtes et des arcs. Application aux voûtes sphériques." *Annales des Ponts et Chaussées*, 1880. pp. 416-440, láms. 14-16.

32. H. Moseley "On a new principle in statics, calles the principle of least pressure." *Philosophical Magazine*, Vol. 3, 1833, pp. 285-288.

33. H. Scheffler *Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken.* Braunschweig: 1857. Traducción al francés, *Traité de la stabilité des constructions. (ouvrage traduit de l'allemand et annoté par M. Victor Fournié)* Paris: Dunod Editeur, 1864.

34. C. Culmann *Die graphische Statik.* Zürich: 1866.

35. A. Yvon Villarceau "Sur l'établissement des arches de pont envisagé au point de vue de la plus grande stabilité." *Institut de France, Academie des Sciences, Memoires presentées par divers savants* Vol.12, 1854. pp. 503-

36. G. Hagen *Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen und Kuppeln.* Berlin: Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1844.

## INTRODUCCION

en alemania donde Schwedler<sup>37</sup> desarrolló un procedimiento gráfico para obtener las correspondientes líneas de intradós, suponiendo un extradós horizontal. A finales del siglo XIX la elección de la curva de intradós en las grandes bóvedas se hacía habitualmente por este procedimiento.

Otra posibilidad era la de hacer el arco isostático introduciendo tres articulaciones. A pesar de las evidentes complicaciones de ejecución a la hora de realizar las articulaciones y las mayores tensiones de trabajo de la fábrica, este procedimiento tuvo gran aceptación.

Sin embargo, ya Poncelet<sup>38</sup> había adelantado que la solución al problema de la indefinición en la posición de la línea de empujes implicaba necesariamente el empleo de la teoría de la elasticidad y el establecimiento de condiciones de deformación. Fue Winkler<sup>39</sup> quien empleando la teoría de la elasticidad y aplicando el principio de mínima energía de deformación encontró la condición que establece la posición de la línea de empujes.

Las siguientes aportaciones a la teoría de las bóvedas en el final del siglo XIX y primer cuarto del presente siglo pueden considerarse, desde un punto de vista teórico, prácticamente insignificantes. Todos los trabajos posteriores tienden a simplificar el complejo proceso del cálculo elástico, mediante una inteligente elección de las incógnitas. En este sentido merecen citarse los trabajos de Krohn<sup>40</sup> y Mohr<sup>41</sup>, que para bóvedas simétricas elegían las incógnitas de forma que cada una de las tres ecuaciones de deformación

---

37. J. W. Schwedler "Theorie der Stützlinie. Ein Beitrag zur Form und Stärke gewölbter Bögen." *Zeitschrift für Bauwesen* Vol.9, 1859. col. 109-126

38. J.V. Poncelet "Examen critique et historique..." *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (Paris)* Vol.35 n°17, 1852 2me semestre., pp. 586-87, op. cit. más arriba.

39. E. Winkler "Die Lage der Stützlinie im Gewölbe." *Deutsche Bauzeitung*, 1879 y 1880. pp. 117, 127, 130 (1879); 58, 184, 210 (1880)

40. *Zeitschrift für Baukunde*, 1880, citado por Winkler op.cit. p.85.

41. *Zeitschrift der Hannover Architekten- und Ingenieurvereins*, 1881. Citado por Hertwig, op. cit., p.85.

sólo contenía una incógnita. Müller-Breslau<sup>42</sup> estudió más tarde el caso de las bóvedas asimétricas.

El siguiente gran paso en la teoría del arco de fábrica se da en la segunda mitad de este siglo y consiste en la aplicación del recientemente desarrollado análisis límite o a rotura. Los teoremas del análisis límite fueron demostrados por primera vez para vigas de un material plástico ideal por Greenberg y Prager<sup>43</sup> y se aplicaron a arcos de un material perfectamente plástico por E.T.Onat y W.Prager<sup>44</sup>. Kooharian<sup>45</sup> los aplica por primera vez a arcos de fábrica, aunque sus consecuencias han sido desarrolladas fundamentalmente por Heyman<sup>46</sup>. Recientemente Parland<sup>47</sup> ha demostrado estos teoremas con mayor generalidad aplicando un enfoque derivado de la mecánica de los medios continuos.

Los teoremas de análisis a rotura aplicados a los arcos no modifican en absoluto el análisis clásico de Coulomb sobre la estabilidad de los arcos y bóvedas de fábrica, ni los subsiguientes desarrollos que hemos descrito en los párrafos anteriores. De hecho, eliminan el único argumento esgrimido sobre la imperfección de las teorías tradicionales sobre bóvedas, citado hasta la saciedad en todas las revisiones históricas de la época, y dan validez a un

---

42. *Zeitschrift der Hannover Architekten- und Ingenieurvereins*, 1884 y *Zentralblatt der Bauverwaltung*, 1889. Citado por Hertwig, op.cit. p.85.

43. Greenberg y Prager *ASCE Proceedings*, 77, 1951, y para problemas y condiciones de fluencia más generales por Drucker, Greenberg y Prager *Quarterly of Applied Mathematics*, 9, 1952, y *Journal of Applied Mechanics*, 73, 1951. Citados por Kooharian "Limit Analysis...", op. cit. más adelante, pág. 321.

44. E.T.Onat y W.Prager *Limit Analysis of Arches*, Brown University Report All-69 to Office of Naval Research. Citado por Kooharian "Limit Analysis...", op. cit. más adelante, pág. 321.

45. A. Kooharian "Limit Analysis of Voussoir (Segmental) and Concrete Arches" *Proceedings of the American Concrete Institute*, 49, 1953: 317-328.

46. J. Heyman "The Safety of Masonry Arches." *International Journal of Mechanical Sciences* Vol.11, 1969. pp. 363-385; "The Estimation of the Strength of Masonry Arches." *Proceedings of the Institution of Civil Engineers* Vol.69, Part 2, 1980 Dic. pp. 921-937; y *The Masonry Arch* Chichester: Ellis Horwood, 1982.

47. H. Parland "Basic Principles of the Structural Mechanics of Masonry: A Historical Review." *International Journal of Masonry Construction* Vol.2, No.2, 1982. pp. 48-58

## INTRODUCCION

supuesto sobre el que se había venido trabajando desde entonces<sup>48</sup> : si existe una configuración de equilibrio, es decir, una línea de empujes contenida dentro del arco, éste está en equilibrio. En la primera parte de esta tesis se hace un análisis detallado de sus implicaciones.

### 1.1.2 Bóvedas compuestas: cúpulas, bóvedas de crucería y en rincón de claustro

Como dijimos en el apartado anterior el primer diseño 'científico' de una cúpula fue quizá el realizado por Wren para la cúpula de S. Pablo, asesorado por Hooke.

La primera contribución al análisis estructural de las cúpulas corresponde a Bouguer<sup>49</sup> en 1734 que estudia las formas que deben tener las cúpulas para que sean estables en la hipótesis de que no existe rozamiento entre las dovelas que componen la cúpula. Esta hipótesis permite reducir el problema a términos puramente matemáticos y las soluciones teóricas sobre las formas y espesores teóricos de las cúpulas se sucedieron a lo largo del siglo, pero sin llegar a tener ninguna aplicación en la práctica. En este apartado habría que clasificar los trabajos de Bossut<sup>50</sup>, Salimbeni<sup>51</sup> y Bérard<sup>52</sup>

Los primeros estudios sobre la estabilidad de cúpulas 'reales' se realizan entre 1740-1745, por encargo del Papa Benedicto XIV, con ocasión de los daños observados en la cúpula de S. Pedro de Roma. El primero de ellos fue realizado por tres matemáticos Le Seur, Jacquier y Boscovitch los años 1742

---

48. Véase A. Hertwig "Die Entwicklung der Statik...", op. cit., pág. 84.

49. Bouguer "Sur les Lignes Courbes propres a former les Voûtes en Dome." *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1734. pp. 149-166, 1 lám.

50. Bossut "Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dôme." *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1776. pp. 587-596, lám. XIX

51. L. Salimbeni, *Degli archi e delle volte Libri Sei*. Verona: Dionigi Ramanzini, 1787.

52. J. B. Berard *Statique des voutes, contenant l'essai d'une nouvelle théorie de la poussée, et un appendice sur les anses de panier*. Paris: Chez Firmin Didot, 1810.

y 1743, y sus conclusiones fueron recogidas en un informe publicado en este último año<sup>53</sup>. Este informe representa la primera aplicación del análisis a rotura a una cúpula. Los autores estudiando la posición de las grietas establecieron un modelo de rotura y, luego, aplicando el principio de los trabajos virtuales estudiaron su equilibrio. Este enfoque, sorprendentemente moderno, no recibió la atención que merecía y no tuvo derivaciones posteriores.<sup>54</sup> El segundo estudio fue realizado por Poleni y publicado en 1748<sup>55</sup>. Poleni tras realizar un examen crítico de las teorías conocidas hasta la fecha sobre la estabilidad de las bóvedas, desecha el enfoque de los tres matemáticos y se decide por el empleo de teoría de la catenaria, tal y como fue formulada por Gregory<sup>56</sup>.

El brillante análisis de Poleni apenas tuvo consecuencias posteriores, y sólo en la mitad del siglo XIX reaparece su método de modelos con catenarias para verificar la estabilidad de las estructuras. Este procedimiento fue empleado finalmente por Gaudí que puede considerarse como el último exponente de esta tradición.<sup>57</sup>

---

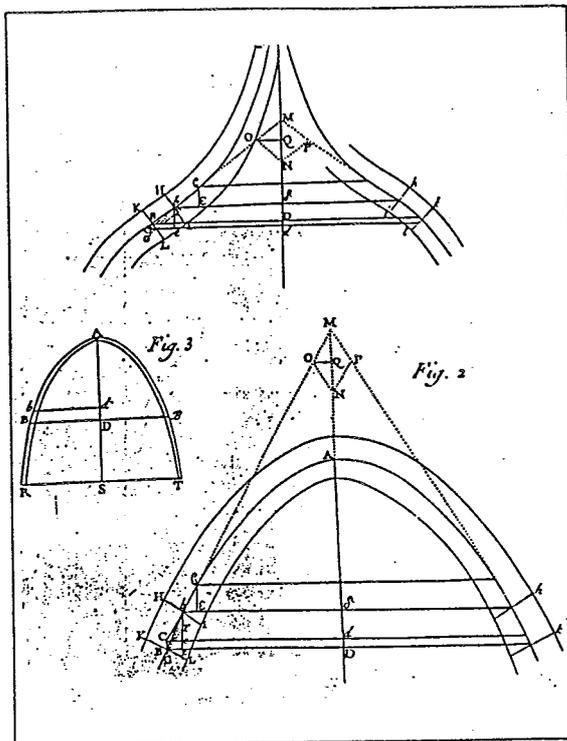
53. T. Le Seur, F. Jacquier, y R. G. Boscovich *Parere di tre mattematici sopra i danni, che si sono trovati nella cupola di S. Pietro*. Roma: 1743.

54. Para un estudio sobre el análisis de los tres matemáticos véase H. Straub *A History of Civil Engineering*, London: 1952, pp. 111-116. Straub realiza la crítica desde un punto de vista elástico y considera incorrecto el tratamiento empleado. No hemos podido consultar la obra original de 1743, pero por los datos aportados por Straub parece que el enfoque es correcto. El único error puede estar en la posición de la junta de rotura, situada en la base de la cúpula; su situación debería estar entre 20° y 30° por encima. Seguramente debido a este error el resultado de los cálculos era que la cúpula no era estable, cuando, evidentemente, sí lo era.

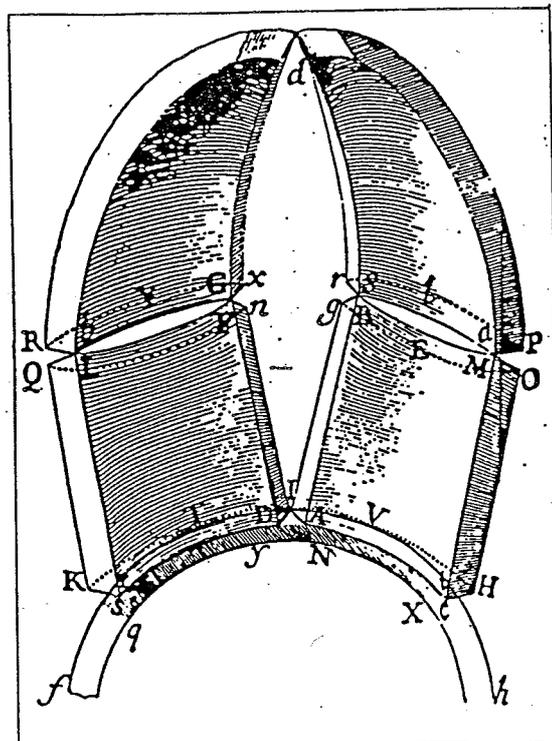
55. G. Poleni *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Padova: Nella Stamperia del Seminario, 1748.

56. Véase nota 5. más arriba.

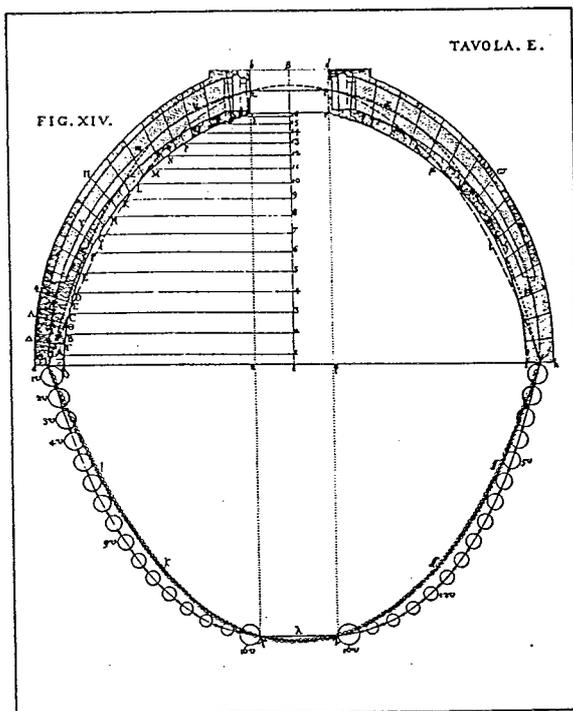
57. Para un estudio histórico detallado de la figura de la catenaria en el diseño de arcos, véase R. Graefe "Zur Formgebung von Bogen und Gewölben." *Architectura* Vol.16, 1986. pp. 50-67.



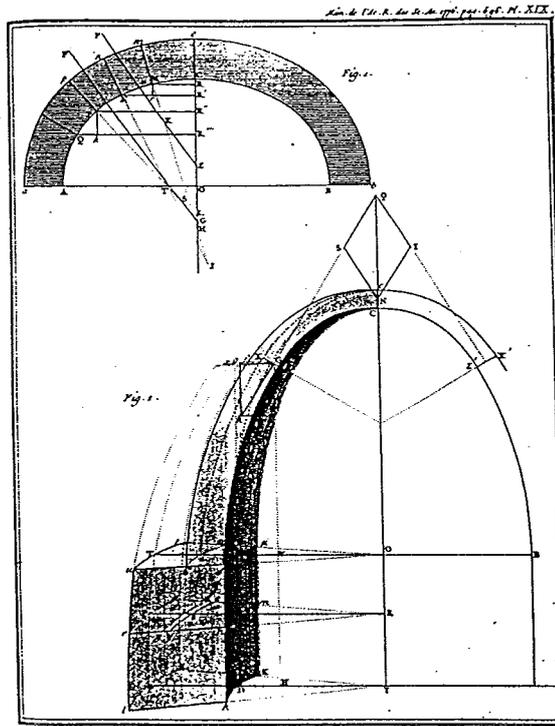
(a) BOUGUER 1734



(b) LE SEUR-JACQUIER-BOSCOVICH 1743



(c) POLENI 1748



(d) BOSSUT 1776

Figura 1.2. Análisis de cúpulas de fábrica. Las ilustraciones corresponden a: (a) Bouguer "Sur les Lignes Courbes propres a former les Voûtes en Dome.", 1734; (b) Le Seur, Jacquier y Boscovich *Parere di tre mattematici sopra i danni, che si sono trovati nella cupola di S. Pietro*, 1743; (c) Poleni *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*, 1748; (d) Bossut "Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dôme.", 1776.

Probablemente la obra que más ha influido en el desarrollo del análisis de las bóvedas compuestas es el tratado de estereotomía de Frézier<sup>58</sup>. En el tercer y último volumen de esta obra Frézier dedica un capítulo completo al empuje de las bóvedas, y las divide para su estudio las bóvedas en simples (bóvedas de cañón y adinteladas) y compuestas (esféricas, de crucería, de rincón de claustro, etc.). Como él mismo afirma, es la primera vez que se aborda este problema:

Les Auteurs qui ont travaillé à résoudre le Problème de la Poussée des Voûtes, n'ont fait attention qu'à celles des Berceaux & des Platebandes... Je vais tâcher de suppléer à cette omission autant qu'il est nécessaire pour la pratique, en rapportant toutes sortes de Voûtes aux cylindriques par des conséquences tirées de la spéculation & de l'expérience.<sup>59</sup>

Frézier no analiza ejemplos concretos pero sí especifica de que forma debería llevarse a cabo este análisis. En algunos casos como en las bóvedas en rincón de claustro y en las cúpulas esféricas se aventura a extraer conclusiones de aplicación práctica; así, dice, y como veremos más adelante tiene razón, que una cúpula esférica empuja menos de la mitad que la correspondiente bóveda de cañón.

En la segunda mitad del siglo XVIII sólo merecen destacarse los estudios teóricos realizados por Gauthey<sup>60</sup> y las experiencias sobre modelos de Rondelet<sup>61</sup>. Los primeros se realizan en el contexto del debate sobre la estabilidad de la cúpula de Santa Genoveva en Paris y en ellos Gauthey aplica por primera vez, aunque con dudoso éxito, el mecanismo de rotura de las cuatro barras al examen de la estabilidad de los gajos en que se dividiría la cúpula

---

58. A. F. Frézier *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*. Strasbourg/Paris: 1737-1739. 3 vols.

59. A. F. Frézier *La théorie et la pratique...*, op. cit. Vol. 3, pág. 388.

60. E. M. Gauthey *Mémoire sur l'application des principes de la Méchanique à la construction des voûtes et des domes, dans lequel on examine le Problème proposé*. Paris: 1771, y *Dissertation sur les dégradations survenues aux piliers du dome de Panthéon Français, et sur les moyens d'y remédier*. Paris: 1798.

61. J. Rondelet *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*. Paris: 1834-1848. 6 vols (primera ed. 1802-1810.)

## INTRODUCCION

en el momento de la rotura<sup>62</sup>. Probablemente el farragoso empleo de las matemáticas de Gauthey hizo que sus memorias no gozaran de gran difusión.

Lo contrario sucedió con los ensayos de Rondelet<sup>63</sup>. Estos ensayos, realizados muchas veces en condiciones discutibles y destinados a verificar una teoría de las bóvedas incorrecta y difícil de comprender, tuvieron el gran mérito, sin embargo, de proporcionar reglas proporcionales simples de diseño para su uso en la práctica del dimensionamiento de estas bóvedas compuestas, y gozaron de extraordinaria popularidad.

En la primera mitad del siglo XIX aparecen las primeras contribuciones analíticas rigurosas. En 1823 Lamé y Clapeyron<sup>64</sup> publican su memoria sobre la estabilidad de las bóvedas, realizada a raíz de sus trabajos en la construcción de la Iglesia de San Isaac en San Petersburgo. Tras examinar el problema de las bóvedas de cañón, pasan a tratar la estabilidad de la proyectada cúpula principal de la iglesia. El año siguiente Dietlein<sup>65</sup> publica su memoria sobre las bóvedas de crucería, y en 1826 Navier<sup>66</sup> su libro de lecciones para *l'Ecole des Ponts et Chaussées*, donde estudia los supuestos teóricos para el análisis de las cúpulas (con un apartado sobre el cálculo de los zunchos metálicos), bóvedas de arista y en rincón de claustro. Los libros de Persy<sup>67</sup>,

---

62. Gauthey dedica dos memorias a este problema. En la primera, *Mémoire sur l'application des principes de la Méchanique à la construction des voûtes et des domes...*, op. cit., utiliza la teoría de La Hire. En la segunda, *Dissertation sur les dégradations survenues aux piliers du dome de Panthéon Français...*, op. cit., emplea la hipótesis correcta de colapso mediante el mecanismo de cuatro barras. Suministra también una tabla con las dimensiones de los contrafuertes en función del diámetro de la cúpula.

63. Véase J. Rondelet *Traité théorique et pratique...*, op. cit., Libro 9, Sección 6, 'Théorie des voûtes', pp. 218-341

64. M. G. Lamé y E. Clapeyron "Mémoire sur la stabilité des voûtes." *Annales des Mines* Vol.8, 1823. pp. 789-836, lám. V.

65. J. F. W. Dietlein *Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe*. Halle: Hemmerbe und Schwetschte, 1823.

66. L. M. H. Navier *Resumé des Leçons donnés à l'Ecole des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique à l'Etablissement des Constructions et des Machines*. Bruselas: De Mortier, 1826.

67. N. Persy *Cours de Stabilité des Constructions à l'usage des Élèves de l'Ecole d'Application de l'Artillerie et du Génie*. Metz: Lithographie de l'Ecole d'Application, 1834.

Scheffler<sup>68</sup>, Michon<sup>69</sup> y la memoria de Durand-Claye<sup>70</sup> abundan en el mismo sentido y emplean hipótesis de rotura análogas.

Sin embargo, las aportaciones son siempre teóricas o se limitan a la verificación de la estabilidad de alguna cúpula en particular. No se confeccionan Tablas, que, en este caso más aún que en el de los arcos, serían indispensables para su uso por los constructores y arquitectos. Solamente al final del siglo XIX aparecen las primeras aplicaciones prácticas, como las de Ungewitter/Mohrmann<sup>71</sup> y Körner<sup>72</sup>. Por último, hay que citar el estudio de Beckett<sup>73</sup> donde aparecen por primera vez calculadas las proporciones de colapso de las cúpulas.

Mientras tanto, en los tratados de construcción se publica, casi sin excepciones, la única referencia existente hasta el momento para el diseño de estas bóvedas: las reglas empíricas de Rondelet<sup>74</sup>.

En este siglo el desarrollo de la teoría de cáscaras y membranas permite analizar las bóvedas compuestas de los tipos mencionados. Sin embargo, estas teorías son de aplicación para materiales elásticos e isorresistentes.

68. H. Scheffler *Traité de la stabilité des constructions...*, op. cit., pp. 165-192.

69. M. Michon (trad. E. Saavedra) *Introducción sobre la estabilidad de las construcciones*. Madrid: Imprenta Nacional, 1860. (primera edición 1840.)

70. A. Durand-Claye "Vérification de la stabilité des voûtes et des arcs. Application aux voûtes sphériques." *Annales des Ponts et Chaussées*, 1880. pp. 416-440, planches 14-16.

71. G. G. Ungewitter *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen. III Auflage neu bearbeitet von K. Mohrmann*. Leipzig: 1890, 2 vols.

72. K. Körner *Gewölbte Decken (Handbuch der Architektur. Dritter Teil. 2 Band. Heft 3, b)* Stuttgart: 1901. (primera edición 1890.)

73. E. Beckett Denison "On the Mathematical Theory of Domes." *Memoirs of the Royal Institute of British Architects*, 1871 feb.. pp. 81-115. Un resumen de las conclusiones principales de este artículo en: "Dome." *Encyclopaedia Britannica* 9th Edition. Edinbrough: Adam and Charles Black, 1875-1888. Vol.7, pp. 347-348.

74. Véanse por ejemplo los siguientes tratados que gozaron todos ellos de gran difusión: J. A. Borgnis *Traité élémentaire de construction appliqué à l'architecture civile*. Paris: 1838, pp. 192-206; A. Demanet *Cours de construction*. Bruxelles: 1847, pp. 514-517 (existe trad. española); N. Valdés *Manual del Ingeniero*. Paris: 1859, pp. 624-632; N. de Vos *Cours de construction*. Paris: 1880, pp. 271-307; E. Barberot *Traité des constructions civiles*. Paris: 1895, pp. 91-97; M. Foerster *Manual del Ingeniero constructor y del Arquitecto*. Madrid: 1926, pp. 777-778.

## INTRODUCCION

No es este el caso de las fábricas que sólo podemos considerar resistentes a los esfuerzos de compresión. Heyman<sup>75</sup> ha explorado la aplicación de la teoría de la membrana y del análisis a rotura a las cúpulas y bóvedas compuestas. Sus hipótesis, análisis y conclusiones no difieren sustancialmente de las citadas con anterioridad, salvo en la existencia demostrada de los teoremas fundamentales del análisis a rotura.

### 1.2 Diseño estructural: empleo de reglas empíricas

Así pues, en la segunda mitad del siglo XVIII, a efectos prácticos el tema de la estabilidad del arco de fábrica está suficientemente resuelto y existían métodos suficientemente desarrollados y Tablas de fácil uso. Como consecuencia de ello la práctica totalidad de los arcos de cierta importancia fueron, a partir aproximadamente de esta fecha, calculados de acuerdo con la teoría de las estructuras.

Sin embargo, con la teoría del arco de fábrica apenas puede calcularse algo que no sea un puente. Los edificios (iglesias, palacios, hospitales, etc..) presentan estructuras abovedadas muchos más complejas. El análisis de estas bóvedas compuestas presenta, como hemos visto, un considerable retraso con respecto al análisis de los arcos: si los puentes de fábrica se calculaban ya rutinariamente en la segunda mitad del XVIII, las bóvedas complejas y los edificios no lo fueron hasta 100 años más tarde (cuando lo fueron), en plena decadencia de este tipo de construcción.

Esta situación deja la mayor parte de la arquitectura histórica fuera del campo del análisis de estructuras, tal y como lo entendemos hoy día. Sin

---

75. J. Heyman "On shell solutions of masonry domes" *International Journal of Solids and Structures* Vol. 3, 1967. pp.227-41; "Spires and Fan Vaults." *International Journal of Solids and Structures*, Vol.3, 1967. pp. 243-258; y *Equilibrium of Shell Structures*. Oxford: 1977.

embargo, esto no parece haber introducido ninguna variación en el progreso o retraso de estas estructuras.

La realidad es justamente la contraria. Las estructuras de fábrica de mayor importancia (exceptuando los grandes puentes de principios de siglo) corresponden a esta época anterior al análisis de estructuras. Citemos algunos casos bien conocidos: la mayor cúpula de hormigón en masa es la del Panteón (43 m. de luz) construida en el siglo I. a.d.C.; Santa Sofía (33 m), Santa María del Fiore (42 m), San Pedro (42 m), el Gol Dombuz (42 m), no fueron nunca superadas incluso en la época en que el análisis había alcanzado un nivel de desarrollo suficiente. Con los puentes la situación es exactamente la misma: el puente de Constantino sobre el Danubio con luces de hasta 65 m, y, sobre todo, el puente sobre el río Adda en Trezzo, Italia, con 73 m de luz, en ladrillo (el mayor arco de ladrillo nunca construido) y con una esbeltez de  $1/48$ , sólo fueron superados en la segunda mitad del siglo XIX.

¿Cuál es la razón de esta paradójica situación? ¿De qué medios se servían los antiguos constructores para diseñar, con tanto éxito y con un nivel tan bajo de fracasos estructuras de tal tamaño y audacia?

Un examen de los tratados de construcción y arquitectura y de los manuscritos que han sobrevivido correspondientes a esta etapa 'pre-científica' demuestra la existencia de reglas o fórmulas estructurales en la mayoría de ellos, así como el empleo frecuente de modelos.

Las reglas empíricas aparecen en todas las épocas y, algunas de ellas, como veremos alcanzan una extraordinaria difusión. Permiten dimensionar los elementos fundamentales de un edificio de fábrica: espesor de los arcos, sección de los pilares y canto de los contrafuertes. En su mayor parte se traducen en simples construcciones geométricas o manejan fracciones simples (por ej. el canto del contrafuerte debe ser igual a  $1/3$  de la luz de la na-

## INTRODUCCION

ve). En general, se trata de reglas 'proporcionales', es decir conducen a estructuras 'semejantes' (de la misma forma) en el sentido geométrico del término.

El empleo de modelos está documentado desde la antigüedad clásica, aunque probablemente data de mucho antes. Tradicionalmente se les ha atribuido una intención puramente formal, como herramienta del arquitecto para controlar mejor el espacio y, también, para poder 'vender' mejor el proyecto al cliente. El posible uso estructural de estos modelos no ha sido considerado, en general, por los historiadores.

### 1.3 Actitud hacia las reglas empíricas: estado de la cuestión

La mayor parte de las historias del análisis de estructuras y resistencia de materiales han ignorado estas reglas considerándolas, en el mejor de los casos, como un primer intento ingenuo, pero incorrecto, de crear una ciencia de las estructuras. Así, Straub afirma:

... these rules may well be regarded as the beginnings of an 'engineering science'... Though not yet based on 'statics', these rules do, after all, represent an application of scientific, if elementary, mathematics to practical building tasks.<sup>76</sup>

La actitud más generalizada apunta a la imposibilidad de deducir reglas válidas debido a la ignorancia de las leyes de la estática. Las primeras críticas las formula ya La Hire, como hemos visto uno de los fundadores del análisis de las estructuras de fábrica:

Les Architectes on quelques règles pour connoître les épaisseurs qu'on leur doit donner [a los contrafuertes de un arco], mais comme elles ne sont point fondées sur aucune démonstration géométrique, on ne peut pas dire qu'elles soient assurées.<sup>77</sup>

---

76. H. Straub *A History of Civil Engineering*. London: Leonard Hill, 1952, pp. 89-90.

77. P. La Hire *Traité de Méchanique*, op. cit. más arriba, p. 466.

Este tipo de críticas negativas a las reglas empíricas abunda entre las primeras contribuciones al análisis estructural de los arcos<sup>78</sup>. El pensamiento general en la historiografía actual sobre el tema no ha cambiado y queda bien reflejado en las palabras de Parsons:

...There were no means of testing materials to determine their resistance to strain and consequently, the designer could not estimate the strength of a member nor did he have a theory by which he would compute the amount of strain that a member would be called to bear. There was, therefore, a vicious circle of ignorance...<sup>79</sup>

La opinión de R.J. Mainstone, que ha publicado numerosas contribuciones sobre la historia del diseño y análisis de estructuras (v. bibliografía), abunda en el mismo sentido:

...[structural analysis] ...would have been virtually impossible until the latter part of the seventeenth century because clear generalized concepts of forces acting in any direction, and of their combination and resolution by the parallelogram of forces, were not arrived until then.<sup>80</sup>

En muchos casos se muestra el asombro de que a pesar de emplear reglas básicamente incorrectas los resultados fueran tan buenos. Por ejemplo Dorn:

...It is a tribute to their skill that with this assortment of anthropomorphic analogies, qualitative generalizations, traditional arithmetical proportions, rules-of-thumb and intuitive (and incorrect) arch 'theory', Renaissance builders erected magisterial and lasting structures.<sup>81</sup>

Citemos por último a Benvenuto que pone el énfasis en el tema central de la validez de estas reglas:

...il dimensionamento in chiave geometrica restò sino a tempi recenti, il criterio più seguito dagli architetti: il persistente pregiudizio che solo Galileo cominciò a smuovere, secondo il quale strutture geometricamente simili dovrebbero avere identiche proprietà

---

78. Véase por ejemplo H. Gautier *Dissertation sur l'épaisseur des culées des Ponts*...Paris: 1717, Chap. II, 'Observations sur les Auteurs qui ont voulu déterminer la largeur des culées'. También Frezier *La théorie et la pratique de la coupe de pierres*..., op. cit., Vol. III, pp. 343-344, y Rondelet *L'Art de bâtir*, op. cit., Libro 9, pp. 220-21 y pp. 278-281.

79. W.B. Parsons, *Engineers and Engineering in the Renaissance*. Cambridge, The MIT Press, 1965 (reprint of 1939 edition), pág. 481.

80. R.J. Mainstone, *Developments on Structural Form*. Harmondsworth: Penguin, 1983, pág. 284.

81. H.I. Dorn, *The Art of Building and the Science of Mechanics: An Study of the Union of Theory and Practice in the Early History of Structural Analysis in England* Ph.D. Princeton University, 1970, pág. 50.

## INTRODUCCION

statiche ... aveva condotto numerosi tratattisti a definire in linguaggio geometrico la figura delle volte...<sup>82</sup>

Podrían citarse muchas más opiniones en contra, sin embargo creemos que éstas describen bastante bien cuál es la actitud y el sentimiento actual entre los historiadores de la construcción y la ingeniería.

### 1.4 Contradicción entre la actitud actual y los hechos: origen del presente estudio

Podemos resumir la situación actual sobre el tema de la siguiente manera: (1) los antiguos constructores utilizaban reglas proporcionales básicamente arbitrarias e incorrectas; (2) empleando estas reglas construyeron obras de un tamaño y audacia nunca superadas.

Existe una contradicción evidente entre el 'círculo vicioso de ignorancia' (véase Parsons, más arriba) en el que vivían los antiguos constructores y el notable éxito que tenían en la práctica.

Dos explicaciones se barajan habitualmente para explicar este fenómeno. La primera se basa en la extraordinaria 'intuición estructural' de los constructores. El origen de esta idea es antiguo y ya aparece en la obra de Poncelet. Sin embargo, donde se formula con mayor convicción y extensión es en la obra de Viollet-le-Duc. En ningún sitio, sin embargo, se menciona el fundamento de esta intuición que, según hemos visto, en la opinión de los mismos que la defienden, hunde sus raíces en la mayor ignorancia sobre la naturaleza de los fenómenos físicos asociados al problema.

La segunda teoría explica el éxito mediante un penoso proceso de prueba-error (influida quizá por la teoría darwinista de supervivencia del más apto) que, supuestamente, ha dejado sembrado el camino del progreso de un

---

82. E. Benvenuto, *La Scienze della Costruzione ed il suo sviluppo storico*. Firenze, Sansoni, 1982, pág. 234.

registro interminable de colapsos y ruinas. Esta teoría es difícil de apoyar. En primer lugar no explica el éxito, sin ningún colapso durante la construcción, de estructuras que prácticamente doblaban en tamaño cualquier intento similar anterior. Este es el caso del Panteón, de Santa Sofía<sup>83</sup>, ... así como el del Puente sobre el Adda, citados con anterioridad. Tampoco explica fenómenos como el de la extraordinaria rapidez en el desarrollo y difusión del sistema gótico de construcción<sup>84</sup>.

### 1.5 Objetivos y limitaciones

La mencionada contradicción es el origen de la presente tesis. Se pretende conocer en profundidad los métodos de diseño y dimensionamiento estructural de los antiguos constructores y encontrar una explicación plausible de su notable éxito.

El ámbito geográfico se ha limitado a España por razones obvias de facilidad de acceso documental, pero la investigación pretende arrojar luz sobre el problema general planteado antes, en definitiva, sobre el grado de difusión y utilización de las reglas empíricas de diseño estructural y sobre su posible validez en la práctica constructiva.

---

83. Se cita con frecuencia el colapso de la cúpula de Santa Sofía como prueba de esta tesis. El colapso sucedió 15 años después de su construcción y una reciente monografía ha demostrado que se debió no a un incorrecto diseño, sino a un problema de fluencia de los morteros difícil de preveer incluso en la actualidad. La segunda cúpula, un poco menos rebajada ha permanecido hasta la actualidad. Véase D. Thode, *Untersuchungen zur Lastabtragung in spätantiken Kuppelbauten*. Dissertation, Technischen Hochschule Darmstadt, 1975, pp. 15-125.

84. Como ha hecho notar Lynn White, la construcción gótica surgió en el siglo XII y se desarrolló y difundió a la misma velocidad que lo hicieron los rascacielos en el siglo XIX en los EE.UU. Véase: L. White "Medieval Engineering and the Sociology of Knowledge." *Medieval Religion and Technology. Collected Essays*, Berkeley: University of California Press, 1978. pág. 327. La explicación habitual, los maestros constructores se dieron cuenta de las ventajas estructurales del arco apuntado etc., no parece muy plausible, particularmente en un campo que relaciona tanta disciplinas y de tan lenta evolución. Quizá la explicación correcta sea la sugerida por Hertwig que apunta la posibilidad de que el sistema constructivo gótico fuera introducido por constructores procedentes de Bizancio que habrían enseñado a los europeos los secretos de la bóveda de crucería. En cualquier caso parece todavía hoy un campo enteramente abierto a la investigación. Véase: A. Hertwig "Aus der Geschichte der Gewölbe. Ein Beitrag zur Kulturgeschichte." *Technikgeschichte*, Band. 23, 1934. pp. 86-93.

## INTRODUCCION

En la Primera Parte, *Análisis de estructuras de fábrica*, se ha realizado una recopilación sobre el estado actual de los conocimientos sobre el tema, centrandó la atención sobre la aplicación del análisis a rotura, al considerar que este es el método más adecuado para este tipo de estructuras. Para realizarlo, se han tenido en cuenta las últimas contribuciones realizadas en este sentido por Heyman, pero también se ha revisado la tradición clásica que murió a principios de este siglo y donde hay un verdadero tesoro de información sobre el tema. En este aspecto la investigación ha sido todo lo exhaustiva posible.

En la Segunda Parte, *Inventario de Reglas Empíricas en España 1500-1800*, se pretende conocer los métodos empleados por los constructores y arquitectos en el diseño de bóvedas de fábrica, así como, en la medida de lo posible, su difusión y aceptación.

El plazo de tiempo elegido, entre 1500 y 1800, es ciertamente un poco arbitrario, y trata simplemente de reducir el volumen de trabajo a un nivel abarcable por una sola persona. No obstante, la primera fecha marca aproximadamente la aparición de los primeros tratados de arquitectura (objeto prioritario de este estudio); la segunda podría representar, quizá, el surgimiento del análisis estructural como herramienta efectiva de análisis. Sin embargo, tanto los límites cronológicos como los geográficos no se han respetado de manera estricta. El estudio se ha extendido, en realidad desde las primeras fuentes documentales, manuscrito de Zaragoza, manuscritos de Rodrigo Gil etc., hasta finales del siglo XIX, y se han examinado cuantos tratados extranjeros han parecido de importancia.

La investigación sólo ha alcanzado cierta exhaustividad en lo que se refiere a los Tratados de Arquitectura, ya que las bibliografías existentes así lo permitían. Se han consultado todos los manuscritos de los que se ha

tenido noticia, pero ese campo precisa todavía de un inventario adecuado. Es más que probable que una investigación sistemática por los distintos archivos de España incremente considerablemente las referencias de reglas empíricas de este tipo. Creemos que un trabajo de esta naturaleza constituiría de por sí otra Tesis.

Se ha limitado la investigación al tema expuesto. Aspectos importantes, como la influencia de las distintas escuelas extranjeras de ingeniería y arquitectura en la formación de los arquitectos e ingenieros españoles, el nacimiento de dichas escuelas en España, o la influencia de los métodos constructivos, no se han tratado para poder concentrar los esfuerzos e intentar llegar a conclusiones concretas dentro del ámbito propuesto.

En la Tercera Parte, *Validez de las reglas empíricas tradicionales*, se realiza un examen analítico de la validez de las reglas más interesantes o de mayor difusión recogidas en la Segunda Parte, empleando el marco teórico desarrollado en la Parte Primera.

Las Conclusiones resumen los aspectos más importantes que se deducen de la investigación precedente.

La Bibliografía recoge toda la documentación que se ha podido reunir sobre el tema de la historia y la teoría del análisis estructural de las estructuras abovedadas de fábrica. No todas las obras que aparecen en ella son estrictamente relevantes al presente estudio o han podido ser consultadas.<sup>85</sup> Se han incluido por dos razones: en primer lugar por el alto grado de dificultad en la recopilación de estas fuentes; en segundo lugar, como demostración 'empírica' de que el campo de la Historia de la Construcción, incluso en un ámbito reducido como el de las estructuras abovedadas de fábrica, dis-

---

85. Cuando esto es así la obra aparece marcada con un asterisco '\*'. Aproximadamente se han podido consultar las tres cuartas partes del total de las obras citadas en la Bibliografía.

## INTRODUCCION

pone de un 'cuerpo teórico' que, aunque disperso, debe ser tenido en cuenta por su propia riqueza y para evitar la repetición inútil de investigaciones ya realizadas.

Primera Parte

Análisis de estructuras de fábrica



## 2. LOS MATERIALES

Un macizo de fábrica<sup>1</sup> se compone, en general, de piedras o ladrillos, de diferentes formas y tamaños según el tipo, trabados con un mortero que presenta con ellas una cierta adherencia. Se trata pues de un material que no es homogéneo y que presenta resistencias muy desiguales según la dirección de los esfuerzos. No se pueden por tanto aplicar los métodos generales de la resistencia de materiales sin adaptarlos a estas condiciones.

A continuación pasaremos revista a las propiedades mecánicas de las fábricas y de sus componentes como punto de partida para establecer un modelo matemático para el análisis de su comportamiento estructural.

### 2.1 Las piedras

En la construcción de edificios y puentes se han empleado, en general, todo tipo de piedras salvo las más disgregables. Según su tamaño y la forma de su talla se pueden dividir en dos grandes grupos:

- sillares cuando la piedra está bien labrada y escuadrada. La fábrica de estos elementos, recibidos con o sin mortero ('a hueso'), y dispuestos en hiladas regulares recibe el nombre de sillería. Como veremos es la más resistente y se emplea normalmente en los elementos estructurales que reciben más carga como son los pilares y los contrafuertes, o para reforzar los muros en las esquinas.
- mampuestos cuando la piedra está sin labrar, o prácticamente sin labrar. La fábrica de estos elementos recibidos con mortero recibe el

---

1. El Diccionario de la Real Academia de la Lengua define el término *fábrica*, en la acepción que nos interesa, como "Cualquier construcción o parte de ella hecha con piedra o ladrillo y argamasa".

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

nombre de la mampostería. Su resistencia es mucho menor y se emplea en elementos donde el nivel de tensiones es bajo, como son los muros.

En un nivel intermedio entre ambos grupos se encuentran los plamentos, piedras de pequeña dimensión, toscamente labradas que se emplean para realizar las plenterías en las bóvedas. El nivel tensional en las bóvedas suele estar, para tamaños y formas normales, también comprendido entre los mencionados para los dos grupos anteriores.

### 2.1.1 Resistencia a compresión

Se mide, como en el caso del hormigón, sobre probetas en general de forma cúbica. La forma y el tamaño de la probeta influyen en la carga de rotura y es preciso tener en cuenta estos factores para realizar comparaciones fiables.

La resistencia a compresión simple de las piedras es, en general, bastante elevada. En la siguiente tabla presentamos los valores que Delbecq da para algunos tipos de piedras frecuentes en la práctica. La resistencia puede variar, sin embargo, entre piedras del mismo tipo pero de diferentes canteras, por lo que se recomienda realizar ensayos particulares en los casos en que la resistencia tenga un papel crítico, lo que en la práctica sucede raramente.

	compres. (Kg/cm <sup>2</sup> )	tracc. (Kg/cm <sup>2</sup> )	E (10 Kg/cm <sup>2</sup> )	p. esp. (kg/dm <sup>3</sup> )	H (m)
Tiza	20-120	1-15	20-100	1.4	500
Caliza ordinaria	70-400	5-50	50-300	2.1	1119
Caliza compacta	400-1000	40-150	300-600	2.36	2966
Esquistos	150-700	10-100	70-500	2.22	2252
Granito	600-1800	60-150	150-700	2.85	4210
Cuarzita	800-3000	70-200	250-800	3.06	6209

Tabla 1.1. Resistencias mecánicas de las piedras<sup>2</sup>

---

2. Los datos se han tomado de J.M. Delbecq "Analyse de la stabilité des ponts en maçonnerie par la théorie du calcul à la rupture." (Tesis Doctoral, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris: 1983), p. 33. La altura H se ha calculado en base a la media de las resistencias a compresión de la tabla. Es fácil deducir

En la columna de la derecha se ha añadido, siguiendo la tradición de los antiguos tratados de construcción (Rondelet, Gauthey, etc), la altura que tendría que tener una columna de sección constante del mismo material para que se produjera en la base el colapso por agotamiento del material. Introducimos este dato porque creemos que da una idea clara del tamaño que pueden llegar a alcanzar las estructuras de fábrica sometidas a su propio peso.

### 2.1.2 Resistencia a tracción

La resistencia a tracción de las piedras es considerablemente menor que la resistencia a compresión. Los valores de la Tabla 1.1 ponen de manifiesto este comportamiento anisótropo; como puede verse la resistencia a tracción viene a ser aproximadamente la décima parte de la resistencia a compresión. Esta diferencia tan marcada hace que, como veremos, la resistencia a tracción se considere nula en el análisis de este tipo de estructuras.

### 2.1.3 Módulo de Young

Los valores del módulo de Young aparecen así mismo en la Tabla 1.1. Estos valores son orientativos, ya que el módulo de elasticidad de las piedras varía con la tensión de trabajo  $e$ , incluso, el comportamiento es distinto para distintas piedras de la misma cantera<sup>3</sup>. Sin embargo, en general este dato no

---

la fórmula  $H = \sigma_c / p$ . esp. Los valores resultantes son bastante altos. Si hicieramos el prisma o la pared de sección variable, disminuyendo con la altura estos valores podrían llegar a triplicarse (pirámide); si además empleáramos materiales más densos y resistentes en la base y más ligeros al aumentar la altura, se podría alcanzar con tensiones de trabajo del material admisibles una altura parecida a la del Everest. Esta comparación aparece en el libro de J.E. Gordon *Structures* (Harmondsworth: Penguin, 1978), p. 173.

3. Véase P. Sejourné *Grandes Voûtes*, Bourges: 1913-16, tomo 3, págs. 372-374. Cita los siguientes trabajos de C. Bach "Versuche über die Elastizität und Druckfestigkeit von Körpern aus Zement, Zementmörtel und Beton." *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1896, pp. 1381; "Untersuchung von Granit in bezug auf Zug-, Druck-, Bieigungs-, und Schubfestigkeit, sowie in Hinsicht auf Zug-, Druck-, und Bieigungs-Elastizität" *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1897, pp. 241; "Versuche zur Ermittlung der Zusammendrückung (Elastizitätsversuche) und der Druckfestigkeit" *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1903, pp. 1445; "Zur Frage der Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen bei Sandstein" *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1900, pp. 1169 y su libro *Elastizität und Festigkeit*, Berlin: J. Springer, 1905, pp. 67. Bach llega a la siguiente expresión del módulo de elasticidad en función de la tensión de trabajo:  $E = K/\sigma^n$ ,

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

es significativo dado que el bajo nivel tensional existente en las fábricas hace que las deformaciones estén en la práctica totalidad de los casos dentro de límites admisibles.

### 2.2 Ladrillo

#### 2.2.1 Resistencia a compresión

Los ladrillos empleados en las fábricas se obtienen a partir de ciertas arcillas secadas al sol o cocidas artificialmente en hornos. Su resistencia es, en general, inferior a la de las piedras. La norma MV-201 da los siguientes valores 'de cálculo': ladrillos macizos 70-300 Kg/cm<sup>2</sup>; ladrillos perforados 100-200 Kg/cm<sup>2</sup> y ladrillos huecos 30-150 Kg/cm<sup>2</sup>. Delbecq<sup>4</sup> admite para ladrillos de calidad excepcional resistencias características comprendidas entre 350 y 700 Kg/cm<sup>2</sup>. Para los adobes, ladrillos secados al sol, Lahuerta<sup>5</sup> da resistencias entre 20 y 30 Kg/cm<sup>2</sup>.

Para conocer la resistencia de los ladrillos en las antiguas edificaciones es preciso realizar ensayos sobre probetas o elementos extraídos del propio edificio. Thode realizó diversas experiencias sobre los ladrillos de Santa Sofía y San Vitale, ambas construidas en el siglo VI d.C. Realizando ensayos sobre distintas probetas, según la norma DIN 105, Thode obtiene para los ladrillos de Santa Sofía una resistencia característica de 180 Kg/cm<sup>2</sup> y para los de San Vitale de 320-330 Kg/cm<sup>2</sup><sup>6</sup>. Valores, pues, comparables a los de los modernos ladrillos de edificación.

---

donde K es constante y n es otra constante <1.

4. Op. cit. página 34.

5. J. Lahuerta *Formulario para el proyecto de estructuras*. Madrid: Escuela Técnica Superior de Arquitectura, 1975, pág. 64.

6. Véase D. Thode *Untersuchungen über Lastabtragung in Spätantiken Kuppelbauten*. Tesis Doctoral, Darmsatdt: 1975, págs. 49 (Santa Sofía) y 163-164 (San Vitale).

### 2.2.2 Resistencia a tracción

La resistencia a tracción de los ladrillos es muy baja, alrededor del 3 por ciento de la resistencia a compresión, y no se tiene en cuenta en el análisis.

### 2.2.3 Módulo de Young

El módulo de Young de los ladrillos es bajo con valores comprendidos entre los 50,000 y los 250,000 Kg/cm<sup>2</sup><sup>7</sup>. Como en el caso de las piedras varía con la tensión de trabajo y no suele ser relevante dado el bajo nivel tensional existente en este tipo de estructuras.

## 2.3 Morteros

### 2.3.1 Resistencia a compresión

Las resistencias de los morteros empleados modernamente en las fábricas se especifican más adelante al tratar de la resistencia de las fábricas, pero están comprendidas normalmente entre 5 y 150 Kg/cm<sup>2</sup>.

La resistencia de los morteros empleados en las antiguas edificaciones es difícil de precisar. Citaremos los resultados de los ensayos realizados por Rondelet<sup>8</sup>, Vicat<sup>9</sup> y Tourtay<sup>10</sup>:

- Rondelet: resistencias a la rotura comprendidas entre 30 y 65 Kg/cm<sup>2</sup>, según que el mortero sea normal o batido.
- Vicat: morteros de cal grasa y arena ordinaria 20-25 Kg/cm<sup>2</sup>.  
morteros de cal hidráulica 75 Kg/cm<sup>2</sup>.  
morteros de cal muy hidráulica 146 Kg/cm<sup>2</sup>.
- Tourtay: mortero de cal 20 Kg/cm<sup>2</sup>.

---

7. Delbecq op. cit. pág. 34.

8. J. Rondelet, *Traité théorique et pratique de l'art de bâtir*. Paris: Chez Firmin Didot, 1834.

9. Vicat "Recherches expérimentales sur les phénomènes physiques qui précèdent et accompagnent la rupture ou l'affaissement d'une certaine classe de solides." *Annales des Ponts et Chaussées, 1er série*, Vol. 6, 1833. pp. 201-268, Pl. 69.

10. Citado por Delbecq, op. cit. pág. 39.

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

mortero de cemento 75 Kg/cm<sup>2</sup>.

A partir de estos datos podemos deducir que la resistencia de los morteros empleados en el siglo XIX está comprendida entre 20 y 77 Kg/cm<sup>2</sup>. Para edificaciones más antiguas es preciso extraer probetas y realizar ensayos;

### 2.3.2 Resistencia a tracción

La resistencia a tracción de los morteros es también muy baja y se desprecia en los cálculos. Rondelet estima la resistencia a tracción entre 1/8 y 1/10 de la resistencia a compresión, y Vicat da valores comprendidos entre 1 y 12 Kg/cm<sup>2</sup><sup>11</sup>.

### 2.3.3 Módulo de Young

Varía según el tipo de mortero y el estado tensional. McNary y Abrams<sup>12</sup> dan los siguientes valores:

Mortero (cemento:cal:arena)	fck (Kg/cm <sup>2</sup> )	Emáx (Kg/cm <sup>2</sup> )
Tipo M (1:1/4:3)	526	124,200
Tipo O (1:2:9)	34	20,000

Tabla 2.2. Módulo de Young de los morteros

Se aplican en este caso las mismas consideraciones que en las piedras y ladrillos.

## 2.4 Resistencia de las fábricas

Como hemos visto antes una fábrica, de piedra o ladrillo, es un material compuesto. Sus características y su comportamiento son función de las propiedades de sus componentes, del tipo de contacto que se establece entre

---

11. Datos citados por L.M.H.Navier *Resumé des leçons...*, Bruselas: 1839, págs. 13-14.

12. W. S. McNary y D. P. Abrams "Mechanics of Masonry in Compression" *ASCE. Journal of Structural Engineering*, 111, 1985: 857-870.

ellos y de la geometría de su disposición. Un material de esta naturaleza no es isótropo debido a las direcciones de rotura que marcan las juntas.

Los estudios más recientes sobre las propiedades mecánicas de las fábricas se han dedicado casi exclusivamente al caso de las fábricas de ladrillo y de bloques de hormigón<sup>13</sup>.

#### 2.4.1 Resistencia a compresión

La resistencia a compresión simple de una fábrica depende de la resistencia de cada uno de sus componentes y de sus relaciones geométricas (es decir, relación canto ancho de las piedras y espesor de las juntas). Delbecq<sup>14</sup> describe el comportamiento de un conjunto de piedras o ladrillos y juntas de mortero trabajando a compresión como sigue:

- compresión centrada. Dado que el módulo de elasticidad del mortero es mucho menor que el de la piedra, el mortero presenta una tendencia a expandirse lateralmente. En razón de la adherencia y del rozamiento entre el mortero y la piedra esta expansión induce en la piedra un estado de tracción lateral y en el mortero un estado de compresión lateral, de donde resulta que la piedra rompe por tracción en los bordes.
- compresión excéntrica. Existe un momento flector y la estructura sufre una curvatura que se concentra en las juntas de mortero. Aparecen

---

13. Las últimas aportaciones que he podido consultar son las siguientes: A. A. Hamid et al. "Shear Strength of Concrete Masonry Joints." *ASCE. Journal of the Structural Division*, **105**, 1979: 1227-1240; R. G. Drysdale et al. "Tensile Strength of Concrete Masonry.", *ASCE. Journal of the Structural Division*, **105**, 1979: 1261-1276; A. A. Hamid et al. "Concrete Masonry Under Combined Shear and Compression Along Mortar Joints." *ACI Journal*, **77-73**, 1980: 314-320; M. Hatzinikolas et al. "Failure Modes for Eccentrically Loaded Concrete Block Masonry Walls." *ACI Journal*, **77**, 1980: 258-263; A. A. Hamid y R. G. Drysdale "Proposed Failure Criteria for Concrete Block Masonry under Biaxial Stresses." *ASCE. Journal of the Structural Division*, **107**, 1981: 1675-1687; F. Sawko y M. A. Rouf "On the Stiffness Properties of Masonry." *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, **77**, 1984: 1-12; W. S. McNary y D. P. Abrams "Mechanics of Masonry in Compression." *ASCE. Journal of Structural Engineering*, **111**, 1985: 857-870; y M. Z. Ghazali y J. R. Riddington "Simple Test Method for Masonry Shear Strength." *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, **85**, 1988: 567-574.

14. Op.cit. página 40, basándose en el mecanismo propuesto por Hatzinikolas op. cit.

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

también tensiones de cortadura que se oponen a las tensiones laterales. La rotura tiene lugar en este caso por agotamiento del material o giro alrededor de la arista. Se han elaborado modelos de comportamiento de este tipo que permiten deducir algunas de las propiedades observadas en los ensayos.

### 2.4.1.a Fábricas de piedra

La siguiente tabla extraída de las Recomendaciones Internacionales para las Estructuras de Fábrica pone de manifiesto la influencia del mortero:

Resistencia característica a compresión simple de las piedras (Kg/cm <sup>2</sup> )	Resistencia característica a compresión simple de la fábrica en función del tipo de mortero (Kg/cm <sup>2</sup> ver Tabla 2.5)			
	M4	M3	M2	M1
20	13	14	14	14
50	29	33	34	35
75	35	41	45	49
100	41	47	53	62
150	51	59	67	82
200	61	69	80	97
300	72	86	102	120
400	81	104	120	143
600	-	-	160	188

Tabla 2.3. Resistencia de las fábricas en función del tipo de mortero<sup>15</sup>

Tipo de mortero	Resistencia media a los 28 días (Kg/cm <sup>2</sup> )	Composición aproximada en volumen		
		cemento	cal	arena
M1	20	1	0-1/4	2 1/4
M2	10	1	1/4-1/2	-
M3	5	1	1/2-1 1/4	-
M4	2.5	1	1 1/4-2 1/2	-

Tabla 2.4. Resistencia de los morteros tipo<sup>16</sup>

15. Esta Tabla y la siguiente están extractadas de las presentadas por Delbecq, op. cit. página 41, a partir de las *International Recommendations for Masonry Structures*, CIB Report - Publication 58. Los valores característicos se han establecido para un coeficiente de variación del 15 % y una probabilidad igual al 5% de obtener un valor inferior al característico. Los valores relativos a las piedras corresponden a ensayos con cubos con una relación anchura altura igual 1.

16. Los ensayos se han realizado sobre probetas paralelepípedicas de 40\*40\*160 mm.

El espesor de las juntas juega un importante papel en la resistencia a compresión de las fábricas aunque no aparece reflejado en las tablas anteriores. En este aspecto es todavía hoy fundamental la memoria publicada por Tourtay en 1885<sup>17</sup>. Citamos a continuación sus conclusiones:

- a. El agotamiento del mortero en las juntas de las fábricas se produce a tensiones muy superiores a la resistencia intrínseca del mortero, pero muy inferiores a la resistencia de la piedra.
- b. La tensión que produce la disgregación del mortero está en razón inversa del espesor de la junta, manteniendo constantes los otros factores.
- c. Las fábricas formadas por piedras colocadas sin juntas de mortero (a hueso) dan resistencias bastante inferiores a las de la piedra, pero superiores a las de la fábrica con juntas de mortero.
- d. Las piedras unidas por una simple lechada de cemento parecen funcionar monolíticamente y dan resistencias, semejantes a la de las piedras, y muy superiores a las de las fábricas con juntas de mortero.

Estas conclusiones concuerdan bastante bien con el modelo de rotura propuesto por Delbecq. En efecto, cuanto menor sea el espesor de la junta tanto menor será el efecto de la expansión lateral. El efecto beneficioso de la lechada de cemento consiste en crear una superficie de contacto uniforme que recubre las pequeñas imperfecciones de la superficie; de esta forma las tensiones se transmiten en toda el área y no en unos pocos puntos. En el contacto 'a hueso', por bien que se hayan pulido las caras de la junta, siempre habrá irregularidades, granos, etc. que actuando a modo de cuña pueden iniciar una grieta de rotura.

---

17. Tourtay "Sur la influence des joints dans la résistance a l'écrasement des maçonneries de pierre de taille" *Annales des Ponts et Chaussées*, 1885, pp. 582-592. Las experiencias consistieron en ensayos a rotura de bloque de piedra de distintos tipos, intercalando juntas de espesor y composición variables. Los bloques estaban compuestos por dos semibloques paralelepípedicos de 10 cm de lado y 5 cm de altura; la junta se disponía entre ambos.

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

### 2.4.1.b Fábricas de ladrillo

La MV-201 nos da unas tablas que permiten obtener las tensiones admisibles para el cálculo de muros de fábrica de ladrillo; éstas dependen del tipo y resistencia a compresión del ladrillo, del tipo y plasticidad del mortero y del espesor de las juntas. Las siguientes tablas se han elaborado a partir de las anteriores para morteros de plasticidad grasa y juntas de menos de 1 cm de espesor (la resistencia del mortero viene expresada por el dígito correspondiente en Kg/cm<sup>2</sup>; por ej. M-5 fck=5 Kg/cm<sup>2</sup>):

Ladrillo	Res.ladr. (Kg/cm <sup>2</sup> )	Resist. de cálculo de la fábrica Kg/cm <sup>2</sup>					
		M-5	M-10	M-20	M-40	M-80	M-160
Macizo	70	12	14	16	18	20	-
	100	16	18	20	22	25	28
	150	20	22	25	28	32	36
	200	25	28	32	36	40	45
	300	32	36	40	45	50	56
Perforado	100	14	16	18	20	22	25
	150	18	20	22	25	28	32
	200	22	25	28	32	36	40
	300	28	32	36	40	45	50
Hueco	30	6	7	8	9	-	-
	50	8	9	10	11	12	-
	70	10	11	12	14	16	-
	100	12	14	16	18	20	22
	150	16	18	20	22	25	28
	200	20	22	25	28	32	36

Tabla 2.5. Resistencia de las fabricas de ladrillo según MV-201.

### 2.4.1.c Tensiones admisibles

La Tabla 2.1 nos da los valores de rotura de las piedras y la Tabla 2.3 la resistencia característica de las fábricas. Para obtener la tensión admisible de trabajo del material tendremos que aplicar un coeficiente de seguridad que minore esta resistencia. Además, se suelen mayorar las cargas. El

efecto combinado de ambas correcciones produce tensiones admisibles 2 o 3 veces inferiores a la resistencia característica de la fábrica.

En los tratados de de los siglos XIX y comienzos del XX se tomaba como tensión admisible de trabajo la décima parte de la tensión de rotura de las piedras. Comparando los valores de la Tabla 2.3 vemos que ambos métodos dan resultados equivalentes.

Las tensiones admisibles obtenidas por ambos métodos son bastante altas. En la siguiente tabla damos las tensiones de trabajo de algunas estructuras de fábrica de gran tamaño donde el nivel tensional es bastante alto; dado que la mayoría de ellas tienen más de 100 años de edad podemos deducir que dichos niveles han demostrado ser seguros:

EDIFICIOS	Kg/cm <sup>2</sup>
Pilares de la cupula de S. Pedro en Roma .....	17
Pilares de la cupula de S. Pablo en Londres .....	19
Pilares de la cupula de los Inválidos en París .....	14
Pilares de la cupula de S. Genoveva en París .....	29
Columnas de la iglesia de S. Pablo extramuros en Roma .....	20
Columnas de la iglesia de Toussaint d'Angers .....	44
Pilares de la iglesia de Santa Sofía en Constantinopla .....	22
Pilares de la catedral de Palma de Mallorca .....	22
<b>PUENTES</b>	
Puente sobre el Rocky River (L = 85 m) .....	44
Viaducto de Salcano en Göritz (L = 85 m) .....	51
Puente de Plauen (L = 90 m) .....	69
Puente de Villeneuve (L = 96 m) .....	57
Puente de Morbegno (L = 70 m) .....	70

Tabla 2.6. Tensiones de trabajo en estructuras de fábrica.<sup>18</sup>

18. Los datos están sacados de las siguientes publicaciones: J. R. Rondelet, *op. cit.*, tomo IV, p. 135; L.M.H. Navier, *op. cit.* págs. 102-103.; D. Thode, *op. cit.*, pág.96.; J. Rubió Bellver "Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca" *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, 1912, p. 136.; "Viaduc de Salcano sur l'Isonzo." *Nouvelles Annales de la Construction*, Vol. 7, 1910, col. 179. La tensión citada se produce en la junta de rotura en los riñones del arco; en la clave 28 Kg/cm<sup>2</sup> y en los arranques 40 Kg/cm<sup>2</sup>.

### 2.4.2 Resistencia a tracción

Depende de las resistencias a tracción de los materiales constituyentes (piedras y mortero) y de la adherencia entre ellos. En general el fallo se produce falta de adherencia en la superficie de unión de piedra y mortero. Los valores de resistencia a tracción de las fábricas son muy bajos (1-5 kg/cm<sup>2</sup>) por lo que ésta no se tiene en cuenta al realizar el análisis de la estructura.

### 2.4.3 Resistencia a cortante

La resistencia a cortante de las fábricas es función de un gran número de factores. Sin embargo se ha podido demostrar<sup>19</sup> que para niveles normales de las tensiones de compresión (alrededor de 20 Kg/cm<sup>2</sup>) la relación entre la resistencia a cortante  $\tau$  y la tensión de compresión  $\sigma$  puede expresarse por la fórmula:

$$\tau = \tau_0 + \sigma \operatorname{tg}\Phi$$

donde  $\tau_0$  es la resistencia a cortante para  $\sigma=0$  (cohesión) y  $\Phi$  es el ángulo de rozamiento interno<sup>20</sup>. Para que no se produzca el colapso se tiene que verificar:

---

19. Véase M. Z. Ghazali y J. R. Riddington "Simple Test Method for Masonry Shear Strength." *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, 85, 1988: 567-574.

20. El fenómeno del rozamiento entre sólidos es muy complejo. Las leyes del rozamiento fueron formuladas por primera vez por el ingeniero francés Amontons, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1699. C. A. Coulomb casi cien años después publicó en una memoria, *Mémoires de Mathématique et de Physique, preentées a l'Académie Royale des Sciences par Divers Savants*, 1785, donde recogía los resultados de extensos y sistemáticos experimentos, llegando a las mismas conclusiones. Los resultados de Coulomb fueron confirmados por A. J. Morin, *Comptes Rendues...*, 1830. Todas estas experiencias arrojaron las siguientes conclusiones: a) El rozamiento estático es mayor que el rozamiento dinámico; b) La fuerza de rozamiento es directamente proporcional a la fuerza normal N transmitida a través de la superficie de contacto; la constante de proporcionalidad recibe el nombre de *coeficiente de rozamiento*; c) El rozamiento es independiente de la tensión normal, es decir, no depende del área de la superficie de contacto; d) Para velocidades moderadas el rozamiento cinético es independiente, también, de la velocidad; e) El rozamiento depende de la naturaleza de las superficies en contacto; f) Los coeficientes de rozamiento son constantes para cada dos materiales. La anterior exposición está basada en J. Thewlis *Encyclopaedic Dictionary of Physics* (New York: Pergamon Press, 1961), tomo 3, pág. 308.

$$\tau \leq \tau_0 + \sigma \operatorname{tg}\Phi$$

esta expresión recibe el nombre de 'criterio de rozamiento seco de Coulomb'<sup>21</sup>.

Para ladrillos Ghazali y Ridington<sup>22</sup> han obtenidos valores de  $\tau_0$  de comprendidos entre 1.7 y 8.3 Kg/cm<sup>2</sup> y de  $\operatorname{tg}\Phi$  entre 0.78 y 0.81 ( $\Phi=37-39^\circ$ ). Delbecq<sup>23</sup> propone a título indicativo  $\tau_0$  entre 5 y 6 Kg/cm<sup>2</sup> y  $\Phi$  entre  $\pi/4$  y  $\pi/3$ .

El valor de la cohesión es muy bajo y no se suele tener en cuenta en los cálculos. Es determinante por tanto el valor de  $\Phi$ . Este dato no se encuentre fácilmente en los modernos manuales de resistencia de materiales. Citamos a continuación los resultados de las experiencias realizadas en el pasado siglo sobre distintos materiales<sup>24</sup>:

Rondelet	piedra caliza grano fino	30°
Boistard	piedra caliza sup. picada	38°
Regnier	madera sobre piedra	30°
Perronet	piedra (sin especificar)	39°
Rennie	granito	33°

Para los puentes de fábrica se suele tomar en casi todos los manuales  $\operatorname{tg}\Phi=0.5$ ,  $\Phi=27^\circ$ <sup>25</sup>.

---

21. Coulomb fue el primero en formular esta expresión. Véase su memoria "Essai sur une application des règles de Maximis & Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture" *Mémoires de Mathématique & Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans*, Vol. 7, 1773, pp. 351-355. Para un extenso comentario sobre este trabajo véase J. Heyman *Coulomb's Memoir on Statics. An Essay in the History of Civil Engineering* (Cambridge: 1972).

22. Op. cit. pág. 573.

23. Op. cit. pág. 44.

24. Citados por L. M. H. Navier, op. cit., págs. 142-143.

25. Véase por ejemplo uno de los de mayor difusión a principios de este siglo, Ph. Croizette Desnoyers *Cours de Construction des Ponts*, Paris: 1885, tomo I, pág. 418.

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

### 2.4.4 Módulo de elasticidad

Es muy difícil deducir el módulo de elasticidad de una fábrica a partir de lo de sus componentes, incluso en el caso de piezas muy regulares con juntas muy delgadas. A título indicativo incluimos los resultados del estudio realizado por los ingenieros austríacos en 1895<sup>26</sup> :

Tipo	Bóveda	Materiales de la bóveda
Bóveda de piedra ordinaria	0.604	1.37 - 2.71
Bóveda de ladrillo	0.278	0.45 - 1.62
Bóveda de hormigón en masa	2.460	

Tabla 2.7. Módulo de elasticidad de las fábricas ( $\cdot 10^5$  Kg/cm<sup>2</sup>)

Las consideraciones hechas sobre el módulo elasticidad de piedras y ladrillos son también de aplicación en este caso.

---

26. *Bericht des Gewölbe-Ausschusses des Oesterr. Ingenieur und Architekten.* Sonderabdruck aus der Zeitschrift der Oesterreich. Ingenieur und Architekten Vereines, 1895, pp. 41-42. Citado por Sejourné, op. cit., vol3, pág. 373, nota 25.

### 3. MODELO MATEMATICO: LINEA DE EMPUJES

Como hemos visto en el capítulo anterior la característica más importante de las fábricas en cuanto a su comportamiento estructural reside en su poca resistencia a la tracción en relación a su resistencia a compresión y en la anisotropía introducida por las juntas.

Consideraremos, por tanto, las fábricas como un conjunto de elementos débilmente unidos entre sí, capaces de soportar compresiones pero no tracciones. La idealización matemática de esta estructura correspondería a la de un sistema de sólidos en contacto.

Para el estudio de este tipo de estructuras es de enorme utilidad el concepto de línea de empujes ideado de forma casi simultánea por Moseley en Inglaterra y por Méry en Francia alrededor de 1830, intentando buscar un procedimiento que permitiera explicar los fenómenos de colapso de los arcos<sup>1</sup>.

La línea de empujes depende exclusivamente del sistema de cargas y de la geometría de la estructura, no es preciso hacer hipótesis sobre el comportamiento del material y es, por tanto, independiente del método de análisis, elástico o plástico, empleado.

#### 3.1 Definición general de las líneas de empujes e inclinaciones

Consideremos un macizo cualquiera de fábrica, haciendo abstracción por el momento de la resistencia de los materiales, es decir, considerando esta

---

1. La idea es más antigua, en particular en relación con la analogía de la catenaria, sin embargo la definición correcta corresponde a los autores citados. Véase: H. Moseley "On the stability of arches." *Cambridge Philosophical Transactions*, 5, 1833 y "On the equilibrium of a system of bodies in contact." *Cambridge Philosophical Transactions*, 6, 1837. Véase también del mismo autor "On the Theory of the Arch." En: *The Theorie, Practice and Architecture of Bridges...*, editado por John Weale, London: Architectural Library, 1843, Vol.1, part.3 pp. 1-72. E. Méry "Sur l'équilibre des voûtes en berceau." *Annales des Ponts et Chaussées*, 1840, pp. 50-70. Los trabajos de Moseley fueron publicados con anterioridad, pero, según J. Dupuit *L'Equilibre des Voûtes...*, Paris: Dunod, 1870, pág. 118, el manuscrito de Méry data de 1827. En cualquier caso parece claro que ambos llegaron al concepto de línea de empujes de forma independiente.

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

infinita, una estructura de este tipo sometida a un determinado sistema de cargas colapsará bien por el deslizamiento de alguna de las superficies de contacto respecto a otra, o bien por el giro alrededor de alguna de las aristas.

### 3.1.1 Línea de empujes

Sea la estructura MNLK, compuesta por un apilamiento de piedras recibidas sin mortero y de cualquier forma. Consideremos ahora una superficie A-A' que corta a la estructura y llamemos  $R_a$  a la resultante de todas las fuerzas situadas a la derecha del plano. Supongamos que esta superficie de corte cambia de forma y posición de forma que coincida con todas las superficies de contacto B-B', C-C', D-D', E-E', etc., de los sólidos que componen la estructura; y sean  $R_b$ ,  $R_c$ ,  $R_d$ , ... las resultantes, obtenidas en forma análoga a la  $R_a$ , correspondientes a los distintos planos de intersección.

Para cada una de las superficies consideradas la resultante tendrá un punto de aplicación que estará situado *dentro* o *fuera* de la masa de la estructura. Llamaremos a este punto centro de empuje. Si este punto está situado *fuera* de la masa de la estructura entonces la parte derecha girará alrededor de la arista extrema común de la superficie de contacto, produciéndose el colapso de la estructura.

Así pues, la condición de que en ningún punto de la estructura se produzca el colapso por el giro alrededor de alguna de las aristas de las superficies de contacto, equivale a la condición de que los centros de empujes deben caer siempre dentro de la masa de la estructura.

Imaginemos ahora la estructura seccionada por una infinidad de planos (que pueden seguir una ley determinada, por ejemplo ser normales a una

determinada curva) y consideremos las intersecciones de cada una de la dirección de cada una de las resultantes con su plano, es decir, los centros de empujes correspondientes a cada uno de los plano; el lugar geométrico de estos puntos forma una curva que llamaremos línea de empujes<sup>2</sup>.

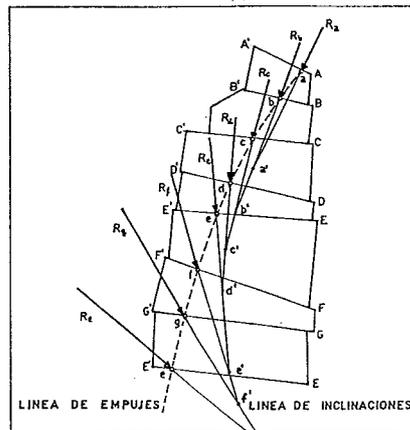


Figura 3.1. Líneas de empujes e inclinaciones en un macizo de fábrica.

De la anterior definición se deduce fácilmente que la línea de empujes depende de la forma y sistema de cargas de la estructura y de la familia de planos de sección seleccionados. Dada una estructura de cualquier forma geométrica, sometida a un determinado sistema de cargas y cuyas partes están en contacto según una serie de superficies definidas geométricamente, los métodos del análisis matemático permiten escribir su ecuación.

También puede procederse a la inversa: dada una línea de empujes, podemos deducir la forma geométrica de una estructura compatible con ella.

### 3.1.2 Línea de inclinaciones de los empujes

Hay otra condición que es necesario cumplir para que no se produzca el

2. No hay un acuerdo muy claro sobre los nombres: Moseley la denominó *line of resistance* y Méry *courbe de pression*. Moseley emplea esta última expresión *line of pressure* para designar otra curva, la envolvente de las direcciones de las resultantes, como veremos más adelante. En alemán se emplea el término *Drückkurve* [curva de presiones o empujes]. Más recientemente Heyman, en sus numerosas contribuciones al estudio de los arcos y bóvedas de fábrica (ver bibliografía) emplea el término *line of thrust*. Nosotros emplearemos en lo sucesivo en castellano la expresión *línea de empujes*, ya que el vocablo *presión* se refiere en general no a una fuerza sino a fuerza/superficie.

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

colapso de una estructura, en la hipótesis que hemos hecho de considerarla como un sistema de sólidos en contacto: no se debe producir el deslizamiento en ninguna de las superficies de contacto. Para que esta condición se cumpla el ángulo que forma la dirección de la resultante en cada plano de sección debe estar comprendido dentro de ciertos límites.

Estos límites están definidos por la superficie de un cono recto cuyo eje es normal a la superficie de contacto en el centro de empujes y cuyo ángulo es el doble de aquel cuya tangente es el coeficiente de rozamiento. Si la dirección de la resultante está contenida dentro de este cono no se producirá el deslizamiento; en caso contrario éste se producirá.

Por lo tanto, la dirección de la resultante respecto a la normal en el centro de empujes es de gran importancia. Consideremos ahora la línea a'b'c'd'... formada por los puntos de intersección de las direcciones de las resultantes  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$ ,  $R_d$ , etc. La dirección de la resultante en cada sección es tangente a esta línea que llamaremos línea de inclinaciones<sup>3</sup>.

Su forma geométrica puede determinarse, como en el caso anterior, por los métodos del análisis. Análogamente, dada una estructura con una geometría y un sistema de cargas dados, la ecuación de la línea de inclinaciones depende de la familia de secciones elegida, es decir, de la posición de las superficies de unión entre las diversas partes que componen la estructura.

Para conocer rigurosamente el estado de equilibrio de una estructura es preciso encontrar estas dos líneas: la línea de empujes y la línea de inclinaciones. La primera determina la posición de la resultante en cada sección; la segunda la dirección de dicha resultante. En el siguiente apartado haremos un desarrollo matemático exacto de las ecuaciones de estas curvas y

---

3. El término empleado por Moseley es *line of pressure*. Adoptaremos en castellano la expresión más descriptiva de *línea de inclinaciones*.

veremos que en las condiciones usuales en la práctica: cargas verticales, arcos o bóvedas de poco espesor en relación con la luz, ambas líneas se aproximan mucho y pueden considerarse a todos los efectos como coincidentes.

### 3.2 Teoría matemática de las líneas de empujes<sup>4</sup>

#### 3.2.1 Definición

Sea ABCD una parte de un elemento resistente sometido a la acción de fuerzas exteriores y a su propio peso. Supondremos:

Que el cuerpo es prismático y sus generatrices son perpendiculares al plano del dibujo.

Que las líneas de intradós y extradós son curvas continuas.

Que el cuerpo es homogéneo y su peso específico es  $g$ .

Que el espesor de la porción considerada, comprendida entre dos planos paralelos al de la figura, y medida perpendicularmente a éste es  $\beta$ .

Que las cargas exteriores están contenidas también en el plano de la figura, actúan sobre las líneas que la limitan, y varían de punto a punto de forma continua.

Consideremos ahora una sección NN' del elemento por un plano perpendicular al del dibujo, eliminemos la parte a la derecha de dicho plano, y restablezcamos el equilibrio de nuevo mediante la aplicación de una fuerza R. Llamaremos a R el empuje en la sección NN', y a su punto de aplicación E, centro de empuje de la sección NN'.

Seccionemos ahora la estructura por una familia de planos infinitamente próximos siguiendo una determinada ley; definiremos como línea de empujes de una bóveda sometida a un determinado sistema de cargas como el lugar geométrico de los centros de empujes para cada uno de los planos de corte.

---

4. La exposición que sigue está basada fundamentalmente en el riguroso estudio realizado por el matemático yugoslavo M. Milankovitch "Theorie der Drückkurven" *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 55, 1907: 1-27. El autor aplica las ecuaciones obtenidas sobre líneas de empujes al equilibrio de los contrafuertes de fábrica en un artículo posterior: "Zu der Statik der massiven Widerlager" *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 58, 1910: 120-188.

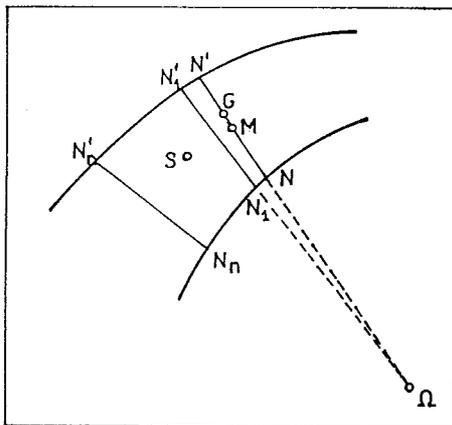
Si variamos el sistema de cargas o la familia de planos de sección, la línea de empujes también variará<sup>5</sup>.

### 3.2.2 Ecuación general de la línea de empujes para una bóveda

Como ya hemos dicho, y se deduce fácilmente de la definición, la línea de empujes depende de la familia de planos de sección elegida. Consideremos, para el caso de las bóvedas, que esta familia se obtiene trazando planos perpendiculares a una determinada curva. También supondremos que las cargas exteriores sólo actúan sobre la línea de extradós.

#### 3.2.2.a Centro de gravedad de una sección

Antes de pasar a la formulación de la ecuación interesa establecer la posición del centro de gravedad de un elemento diferencial de bóveda comprendido entre dos planos infinitamente próximos, ya que esta consideración ha dado lugar a numerosos errores en la literatura sobre líneas de empujes.



Sean  $NN'$  y  $N_n N_n'$  dos secciones cualesquiera de la bóveda, y sea  $S$  el centro de gravedad de la parte comprendida entre ellas. Consideremos ahora que la sección  $N_n N_n'$  se aproxima infinitamente a la sección  $NN'$ ; el centro de gravedad  $S$  alcanzará entonces una posición límite  $G$ ; llamaremos a este punto  $G$  centro de gravedad de la sección  $NN'$ .

Figura 3.2. Centro de gravedad de una sección.

5. En las construcciones de fábrica la fuerza  $R$  actúa siempre en compresión, de ahí las expresiones *empuje*, *centro de empuje* y *línea de empujes*. Sin embargo el concepto puede también aplicarse a estructuras que trabajen a tracción y entonces hablaríamos de: *tracción*, *centro de tracciones* y *línea de tracciones*.

Estableceremos la posición de G de la siguiente manera:

Sea  $NN'_1N_1$  un elemento diferencial de la bóveda,  $\Omega$  el punto donde se cortan los planos  $NN'$  y  $N_1N_1$ , y sea M el punto medio del segmento  $NN'$ . Llamaremos:

$$NN' = \delta \quad NM = \delta/2 \quad \Omega M = r$$

Podemos hallar el punto G como el centro de gravedad de la diferencia de dos triángulos:  $\Omega N'_1N_1$  y  $\Omega NN_1$ , cuyas superficies llamaremos respectivamente  $df_1$  y  $df_2$ . Los centros de gravedad de estos triángulos distarán de  $\Omega$ :

$$\frac{2}{3} \left( r + \frac{\delta}{2} \right) \quad y \quad \frac{2}{3} \left( r - \frac{\delta}{2} \right)$$

respectivamente. Tomando momentos estáticos respecto a  $\Omega$  tendremos:

$$G\Omega (df_1 - df_2) = \frac{2}{3} \left( r + \frac{\delta}{2} \right) df_1 - \frac{2}{3} \left( r - \frac{\delta}{2} \right) df_2$$

por otro lado, sabemos que:

$$df_1 / df_2 = \left( r + \frac{\delta}{2} \right)^2 / \left( r - \frac{\delta}{2} \right)^2$$

de estas dos ecuaciones se deduce:

$$\Omega G = r + \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{r}$$

y,

$$MG = \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{r}$$

Por lo tanto, el centro de gravedad de la sección está separado en general del punto medio por una cantidad finita. Solamente en el caso en que  $r = \infty$  (los planos de sección son paralelos entre sí), o si  $\delta = 0$  (la bóveda es infinitamente delgada), ambos puntos coinciden.

### 3.2.2.b Notaciones

Elijamos un sistema ortogonal de coordenadas (Fig.xx) de origen cualquiera tomando como la dirección de las ordenadas positivas la del peso.

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

- $x, y$  las coordenadas del centro de empujes E de una sección cualquiera NN'
- $\Phi$  el ángulo de la sección NN' con la vertical (medido como aparece en la figura)
- Consideraremos  $x, y, \Phi$  como variables independientes.
- R el empuje en la sección NN'
- V la componente vertical de R
- H la componente horizontal de R
- $\delta$  la longitud de NN'
- M el punto medio de la sección NN' ( $NM = \delta/2$ )
- $\epsilon$  la distancia del centro de empujes E al punto medio de la sección NN' ( $\epsilon = ME$ )
- G el centro de gravedad de la sección NN'
- p la carga por unidad de longitud sobre la línea de extradós
- $\alpha$  el ángulo de dicha carga en cada punto con la vertical (medido como aparece en la figura)

Supondremos que  $p$  y  $\alpha$  son funciones de la variable independiente  $\Phi$ .

Sea  $N_1N_1$  una sección infinitamente próxima a la NN', y que se corta con ella en un punto  $\Omega$ . Llamaremos:

- r la longitud  $M\Omega$  (es decir, el radio de curvatura de la línea media)
- $d\Phi$  el ángulo infinitamente pequeño  $N'\Omega N_1$
- $E_1$  el centro de empujes de la sección  $N_1N_1$
- $M_1$  el punto medio de la sección  $N_1N_1$
- de el diferencial de arco  $N'N_1$
- dm el diferencial de arco  $MM_1$
- di el diferencial de arco  $NN_1$

3.2.2.c Ecuación de la línea de empujes

Consideremos suprimida ahora solamente la parte de la estructura situada a la izquierda del plano  $N_1N_1$  y restablezcamos el equilibrio mediante la fuerza  $R_1$  aplicada en el punto  $E_1$ . Sobre el elemento diferencial de bóveda  $NN'_1N_1$  actúan las siguientes fuerzas:

1. el empuje  $R$  sobre la sección  $NN'$  aplicado en el punto  $E$  y descompuesto según los ejes en  $V$  y  $H$ ,
2. el empuje  $R_1$  sobre la sección  $N_1N_1$  aplicado en el punto  $E_1$ ,
3. el peso  $dG$  del elemento  $NN'_1N_1$ , que debido a la situación infinitamente próxima de las secciones consideraremos aplicado en el centro de gravedad de la sección  $NN'$ ,
4. la carga sobre el diferencial de arco  $N'_1N_1$ , que debido como anteriormente a la infinita proximidad entre ambas secciones consideraremos igual a  $p \, dx$  y actuando en el punto  $N'$ .

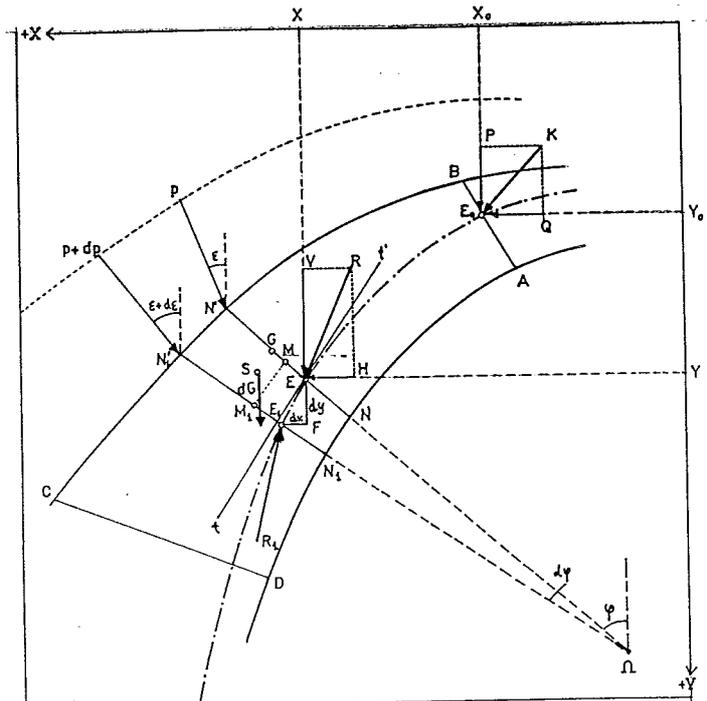


Figura 3.3. Línea de empujes.

Las dos primeras de estas fuerzas son en general finitas, las otras dos tienden a cero con  $dx$  y son del mismo orden de magnitud que  $dx$  y  $dy$ .

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

Para que haya equilibrio, la suma de los momentos de estas cuatro fuerzas respecto a cualquier punto del plano que las contiene debe ser igual a cero. Tomemos como centro de momentos el punto  $E_1$ , y llamemos a los momentos de las fuerzas  $dG$  y  $pde$  con respecto a este punto  $M_g$  y  $M_e$ , respectivamente. La ecuación de equilibrio de momentos toma la forma:

$$(1) \quad Vdx - Hdy + M_g + M_e = 0$$

En esta ecuación los cuatro miembros son del mismo orden de magnitud. En los dos primeros la fuerza es finita y el brazo sin embargo es infinitamente pequeño; en los dos últimos, la fuerza es un infinitésimo y el brazo por el contrario es finito; además, todos los infinitésimos son del mismo orden.

Debido a la infinita proximidad entre los puntos  $E_1$  y  $E$ , y la distancia finita de las fuerzas  $dG$  y  $pde$  a dichos puntos, podemos considerar iguales las distancias de dichas fuerzas a los puntos  $E_1$  y  $E$ .

Por lo tanto, como es fácil de ver:

$$M_g = -dG(GM + \epsilon)\text{sen}\Phi$$

donde

$$dG = g\beta \delta r d\Phi$$

Sabemos que:

$$GM = \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{r}$$

de donde:

$$(2) \quad M_g = -g\beta \delta \left( \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{r} + \epsilon \right) \text{sen}\Phi r d\Phi$$

$$(3) \quad \text{Además:} \quad M_e = -(pde)N'E \text{sen}(\Phi - \alpha) = -p\left(\frac{\delta}{2} + \epsilon\right) \text{sen}(\Phi - \alpha)de$$

La sustitución de las ecuaciones (2) y (3) en (1) da:

$$(4) \quad Vdx - Hdy - g\beta\delta r \left( \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{r} + \epsilon \right) \text{sen}\Phi d\Phi - p\left(\frac{\delta}{2} + \epsilon\right) \text{sen}(\Phi - \alpha)de = 0$$

Supongamos que existe una sección  $AB$  de la cual conocemos las coordenadas de su centro de empujes  $E_0$  ( $x_0, y_0$ ), y el empuje  $K$  (de componen-

tes horizontal y vertical Q y P respectivamente); sabemos, pues, que para

$$(5) \quad \begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad V = P \quad y \quad H = Q$$

de donde, estableciendo el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales:

$$(6) \quad V = P + g\beta \int_x^x \delta r d\Phi + \int_x^x p \cos \alpha \, de$$

$$(7) \quad H = Q - \int_x^x p \sin \alpha \, de$$

Por tanto todos los factores que influyen en la línea de empujes (la forma de la bóveda, el sistema de cargas y la familia de planos de sección) aparecen representados matemáticamente en las ecuaciones (4), (6) y (7). Si sustituimos los valores de V (6) y H (7) en la ecuación (4) y derivamos dos veces la expresión con respecto a  $\Phi$  y  $\epsilon$  obtendremos la ecuación diferencial de la línea de presiones, que puede transformarse en función de las coordenadas x e y.

La ecuación es integrable y sus tres constantes de integración pueden obtenerse a partir de las condiciones de contorno expresadas en (4).

### 3.2.2.d Dirección del empuje

De la ecuación (4) se deduce, reordenando los términos:

$$(8) \quad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} [g\beta\delta r (\frac{1}{12} \frac{\delta^2}{r} + \epsilon) \sin \Phi \frac{d\Phi}{dx} + p(\frac{\delta}{2} + \epsilon) \sin(\Phi - \alpha) \frac{de}{dx}]$$

Si llamamos

$\varnothing$  el ángulo del empuje R con el eje X,

$\mu$  el ángulo de la tangente tt' a la línea de empujes en el punto E con el eje X, es evidente que:

$$(9) \quad \frac{V}{H} = \operatorname{tg} \varnothing \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \mu$$

De las ecuaciones (8) y (9) se deduce que, en general,

$$\varnothing \geq \mu,$$

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

es decir, el empuje corta a la línea de empujes.

### 3.2.3 Bóveda sometida solamente a cargas verticales

Consideraremos ahora el caso particular de una bóveda cuyo sistema de cargas está compuesto por un sistema de fuerzas verticales. En este caso

$$\alpha = 0$$

Supondremos, además, que los planos de sección son perpendiculares al eje de la bóveda (lugar geométrico de los puntos medios de las secciones). En este caso particular

$r$  coincide con el radio de curvatura del eje de la bóveda,

$\Phi$  es igual al ángulo que forma la tangente al eje de la bóveda (en el punto M) con el eje de las X,

$dm$  es el diferencial de arco del eje de la bóveda, de forma que

$$r d\Phi = dm$$

las ecuaciones (8), (6) y (7) para este caso se convierten en:

$$(10) \quad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{H} \left[ g\beta r \left( \frac{1}{12} \frac{\delta^2}{r} + \epsilon \right) \text{sen}\Phi \frac{dm}{dx} + p \left( \frac{\delta}{2} + \epsilon \right) \text{sen}\Phi \frac{de}{dx} \right]$$

$$(11) \quad V = P + g\beta \int_x^x \delta dm + \int_x^x p de$$

$$(12) \quad H = Q$$

La ecuación (12) expresa que la componente horizontal del empuje es la misma para todas las secciones (esto se debe a la verticalidad de las cargas).

Sustituyendo los valores de V (11) y H (12) en la ecuación (10) solamente es preciso derivar una vez para eliminar los signos de integral. La ecuación diferencial de la línea de empujes de una bóveda con cargas verticales es, pues, de segundo orden. Esta ecuación ya contiene una constante Q. Para

encontrar su integral definida es preciso conocer tres constantes (tres puntos de paso de la curva, o el empuje horizontal y dos puntos, etc.), cuando éstas no se pueden determinar obtendremos una familia de infinitas líneas de empujes.

La determinación de la integral particular que corresponde a la verdadera línea de empujes que existe en la bóveda (en la que el empuje en cada sección sería la resultante de las tensiones en dicho plano) no puede establecerse basándose únicamente en las ecuaciones de la estática. De momento no nos ocuparemos de este problema, solamente resaltaremos el hecho que para una bóveda y un sistema de cargas dado existe un número infinito de líneas de empujes compatibles con las condiciones de equilibrio de la estática.

### 3.2.3.a Familia de planos de corte verticales

En el caso particular de que además de ser las cargas verticales la familia de planos de sección sea también vertical, tendremos:

$$\Phi = 0 \quad \alpha = 0$$

la ecuación general (8) se convierte en

$$(13) \quad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = 0$$

En relación con la inclinación del empuje (9) en este caso se verifica

$$(14) \quad \phi = \mu$$

es decir, el empuje es tangente a la línea de empujes y la línea de empujes coincide con la línea de inclinaciones.

Dado que todas las cargas son verticales no es preciso distinguir entre las cargas y el peso propio de la bóveda. Llamemos a  $w = f(x)$  el peso específico de la proyección horizontal de la bóveda y sea  $w$  función de la variable independiente  $x$ . Por lo tanto:

$$(15) \quad V = P + \int_x^x w dx \quad H = Q$$

de donde

$$(16) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{Q} [P + \int_x^x w dx]$$

La derivada de esta ecuación respecto a  $x$  da:

$$(17) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{Q}$$

Esta es la ecuación diferencial de la línea de empujes para este caso particular.

La integración de la ecuación (26), teniendo en cuenta que para  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,

$$(18) \quad y = y_0 + \frac{1}{Q} \int_{x_0}^x dx \int_x^x w dx + \frac{P}{Q} (x - x_0)$$

Esta es la ecuación de la línea de presiones.

### 3.2.3.b Polígono funicular

Para el caso de una porción de bóveda que no tenga carga, es decir

$$w = 0$$

la ecuación de la línea de empujes es

$$(19) \quad y = y_0 + \frac{P}{Q} (x - x_0)$$

La línea de empujes se convierte en una recta. Supongamos ahora que dividimos la bóveda de la figura en partes discretas por una familia de planos verticales  $n_1 n_1$ ,  $n_2 n_2$ ,  $n_3 n_3$ , ..., y que concentramos los pesos correspondientes  $P_1$ ,  $P_2$ , ... en sus centros de gravedad  $S_1$ ,  $S_2$ , ...; en este caso la línea de empujes se convierte en el polígono funicular de las fuerzas  $P_1$ ,  $P_2$ , ... En los planos de corte  $n_1 n_1$ ,  $n_2 n_2$ , ..., el polígono funicular es tangente a la línea de empujes para una familia infinita de planos verticales, ya que para estos puntos no han cambiado ni el centro de empujes ni el empuje (la resultante de las fuerzas).

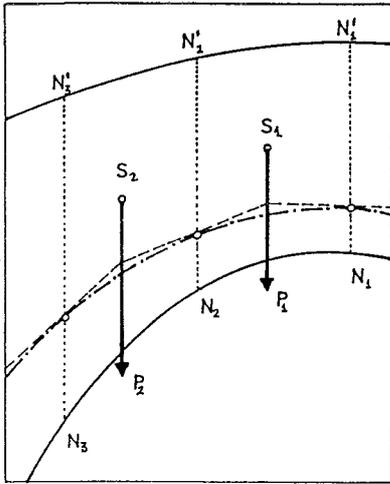


Figura 3.4. Polígono funicular

Queda de esta forma demostrado que el polígono funicular de un sistema de fuerzas obtenido como se ha descrito más arriba concentrando los pesos correspondientes a distintos sectores en sus correspondientes centros de gravedad, circunscribe la línea de empujes (siempre en la hipótesis de secciones verticales).

### 3.2.3.c Catenaria

Si suponemos que la bóveda degenera en una cadena sin ninguna resistencia a la flexión (es decir, de espesor cero), todavía es posible el equilibrio (aunque sea inestable) para el caso en que la línea de empujes coincida con la catenaria. Para obtener la ecuación de la catenaria consideraremos, pues, que:

$$\delta = 0$$

y, por tanto,

$$\epsilon = 0$$

también se deduce que:

$$de = di = dm = ds$$

donde ds es un diferencial de catenaria, cuya ecuación diferencial:

$$(20) \quad \frac{V}{H} - \frac{dy}{dx} = 0$$

Supongamos que la cadena, análogamente al caso de las bóvedas que ya hemos estudiado, sometida a un sistema de cargas p y que su peso específico en un punto x,y es  $g_x$ , las ecuaciones de equilibrio de fuerzas verticales y horizontales son:

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

$$(21) \quad V = P + \int_x^x g_x ds + \int_x^x p \cos \alpha ds$$

$$(22) \quad H = Q - \int_x^x p \sin \alpha ds$$

Las ecuaciones (20), (21) y (22) determinan la ecuación de la catenaria. En el caso de que las cargas exteriores sean verticales la catenaria y la línea de presiones coinciden. Podemos, pues, considerar la línea de presiones como la figura de equilibrio de una cadena infinitamente delgada cuya carga por unidad de longitud de la proyección horizontal,  $w$ , está representada por una función de  $x$ :  $w = f(x)$

### 3.3 Propiedades fundamentales de las líneas de empujes de bóvedas sometidas a su propio peso

Resumimos a continuación los hechos más relevantes en cuanto al estudio de las estructuras abovedadas sometidas a su propio peso:

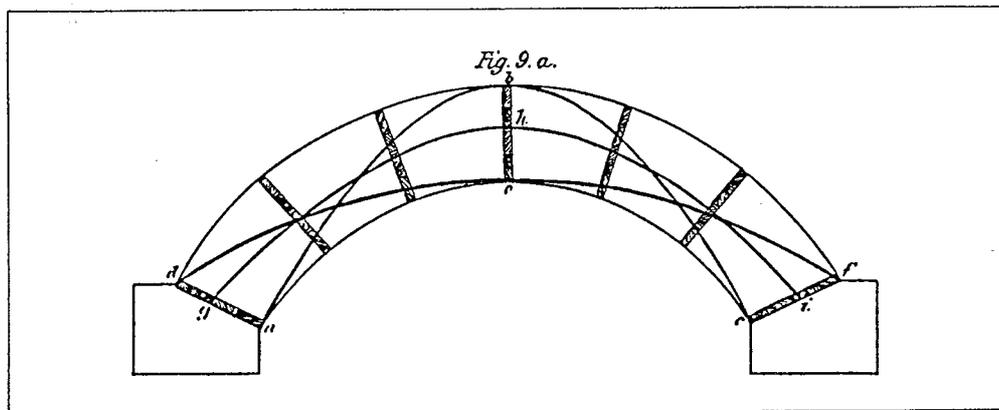
- la forma de las líneas de empujes e inclinaciones es función de la forma geométrica de la estructura definida por sus líneas o superficies de extradós e intradós, y de la familia de planos ideales de corte elegidos. Por tanto, es independiente del tamaño.
- en la hipótesis de planos de corte verticales las líneas de empujes e inclinaciones se confunden y, además, coinciden con el antifunicular de las cargas. Esta hipótesis simplificatoria va a favor o en contra de la seguridad dependiendo del modo de colapso de la estructura y de la forma de acción del material de relleno. Más adelante veremos en qué casos esto es así y en qué grado.
- la posición de la línea de empujes no puede determinarse en base a consideraciones puramente estáticas y, en general, tendremos una familia de posibles líneas de empujes compatibles con las cargas y la geometría de la estructura.

#### 4. ANALISIS A ROTURA: TEOREMAS FUNDAMENTALES

El estudio de la líneas de empujes en una estructura de fábrica nos permite conocer su grado de 'estabilidad' al vuelco o por deslizamiento, así como su estado tensional. La ecuación de esta curva puede obtenerse por los métodos del análisis matemático y se ha hecho un desarrollo riguroso de su definición y propiedades.

##### 4.1 Posición de la línea de empujes. Inconvenientes del análisis elástico

Las bóvedas y arcos son, en general, estructuras hiperestáticas, y, por tanto, pueden existir un número infinito de líneas de empujes pertenecientes a una misma familia de curvas. En estas condiciones, la línea de empujes 'real', es decir la que se obtendría a partir del estado real de tensiones en el interior de la estructura siguiendo la familia de planos de corte elegida, no puede deducirse de consideraciones puramente estáticas.



**Figura 4.1. Posición de la línea de empujes. Experimento de Barlow.** Moseley demostró analíticamente que la línea de empujes puede ocupar distintas posiciones dentro de un arco. Barlow presentó en 1846 a la Institution of Civil Engineers un ingenioso experimento que permitía demostrar este hecho. Las juntas entre las seis dovelas que forman el modelo de arco están formadas por cuatro tralucos de madera sueltas. Se retiraron tres de las cuatro piezas en cada junta en diferentes configuraciones correspondientes a distintas líneas de empuje que, de esta forma, se hacían físicamente visibles.

Esta indeterminación en la posición de la línea de empujes fue causa de gran preocupación entre los ingenieros en los años anteriores a la aparición

de la teoría elástica y se realizaron numerosos intentos para fijar su posición o, al menos, establecer su intervalo posible de variación dentro del arco<sup>1</sup>.

La aplicación de la teoría de la elasticidad y del principio de mínima energía de deformación permitió, finalmente, a Winkler poder determinar la posición de la 'verdadera' línea de empujes de un arco biempotrado según el siguiente teorema<sup>2</sup>: "entre todas las líneas de empujes posibles para un sistema de fuerzas dado, la verdadera es la que se aparta menos de la directriz del arco". Esto se traduce en una condición geométrica que permite elegir 'visualmente' entre las líneas posibles una que no difiera excesivamente de la real.

Sin embargo, la aplicación de la teoría de la elasticidad al estudio de los arcos de fábrica presenta un cierto número de inconvenientes. Para valorar el estado de un arco siguiendo el análisis elástico tendremos que realizar en primer lugar ciertas hipótesis sobre los contrafuertes, que son rígidos o que se deforman siguiendo una ley determinada dependiendo de la carga a que están sometidos, y sobre las propiedades del material que lo compone, homogeneidad,

---

1. Coulomb en su "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique..." *Mémoires de Mathématique et de Physique...*, Vol.7 (1773): 343-382, se limitó a señalar que el empuje en la clave está comprendido entre dos valores uno máximo y otro mínimo, según su posición. Las siguientes aportaciones que buscaron aplicación práctica a este planteamiento teórico buscaban configuraciones de colapso lo que implicaba suponer la línea de empujes mínima. Ver, por ejemplo: Audoy "Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau" *Mémorial de l'Officier de Génie*, 1820: 1-16. Navier en su *Resumé des leçons...* (Bruselas: 1839): 166-170, expuso por primera vez la hipótesis de repartición lineal de las presiones y señaló que para que no hubiera tracciones la resultante debía pasar a 1/3 del borde. Carvallo "Etude sur la stabilité des voûtes" *Annales des Ponts et Chaussées*, 1853: 1-77, empleó esta regla del 'tercio' para fijar la posición de la línea de empujes que pasaría a 1/3 del canto del borde superior en la clave y a un 1/3 del intradós en la junta de rotura. Esta regla gozó de gran difusión y se siguió empleando hasta principios del s. XX. Moseley "On the stability of arches" *Cambridge Philosophical Transactions*, 1837, aplicó su 'principio de mínima resistencia' para fijar su posición. Otras contribuciones se limitaban a establecer, dada la imposibilidad de conocer con certeza su situación, el campo de variación posible dada la geometría de la estructura y la tensión admisible del material. Este enfoque ya fue intuido en el trabajo pionero de Méry "Sur l'équilibre des voûtes en berceau" *Annales des Ponts et Chaussées*, 1840: 50-70, y fue desarrollado con todo rigor en un procedimiento gráfico por Durand-Claye "Sur la verification de la stabilité des voûtes en maçonnerie et sur l'emploi des courbes de pressions" *Annales des Ponts et Chaussées*, 1867: 132-133.

2. E. Winkler "Die Lage der Stützlinie im Gewölbe", *Deutsche Bauzeitung*, 1879, pp. 117-9, 127-8, 130; 1880, pp. 58-60.

módulo de elasticidad, etc.

Partiendo de un conjunto de suposiciones de este tipo podremos realizar un análisis elástico del arco; es decir, habremos obtenido un estado de tensiones y unas reacciones exteriores compatibles con las hipótesis y con el sistema de cargas existente. Sin embargo, decir que este estado tensional que acabamos de obtener representa el estado real de la estructura quizá sea mucho suponer. Además, de lo discutible de considerar un módulo de elasticidad constante, irregularidades no visibles de la construcción, el paso del tiempo, un pequeño cedimiento en los contrafuertes, la aparición de grietas de retracción, etc., pueden alterar de forma notable el estado de la estructura de acuerdo con la teoría de la elasticidad.

No parece razonable que, por ejemplo, un pequeño cedimiento de unos milímetros en relación con una luz de varios metros pueda tener un efecto apreciable sobre el estado general de la estructura aunque pueda modificar sensiblemente la posición de la línea de presiones<sup>3</sup>. Pero el inconveniente fundamental es que la teoría elástica no aborda el tema de la estabilidad.

El diseño de estructuras de fábrica utilizando el método elástico de la tensión admisible llevaría a configuraciones altamente 'inestables' para tamaños convencionales<sup>4</sup>. El método del 'tercio', la obligación de que no aparezcan tensiones en ningún punto de una sección, en realidad está enmascarando una condición geométrica que tiene su origen en suministrar al arco una cierta seguridad en relación con la rotura, una cierta 'estabilidad'.

---

3. Para un estudio comparativo de los distintos métodos de análisis de arcos véase J. Heyman *The Masonry Arch*, Chichester:1982. Las opiniones aquí expuestas coinciden básicamente con las de Heyman.

4. Supongamos por ejemplo que diseñamos un arco de 10 metros de luz en ladrillo, sometido a su propio peso (peso específico =  $1800 \text{ kg/m}^3$  y  $\sigma_{adm} = 10 \text{ kg/cm}^2$ ) por el método de las tensiones admisibles; obtenemos una relación canto/luz de 1/16, muy cerca de la proporción de colapso 1/18 (la resultante pasa 1/11 del canto en la base). Si calculamos la relación entre el momento de estabilidad y el de vuelco veremos que  $M_e/M_v = 1.05$ . El arco es inaceptable no porque aparezcan fisuras de tracción en su intradós o extradós (que, en cualquier caso, podrían sellarse con masilla elástica, etc.), sino porque no presenta suficiente seguridad en relación con el colapso.

#### 4.2 Análisis a rotura

El análisis elástico se basa en el concepto de tensión admisible. El análisis a rotura se basa en el concepto de carga o configuración límite, aquella para la cual se produce el colapso de la estructura, y en establecer la seguridad con respecto a ella.

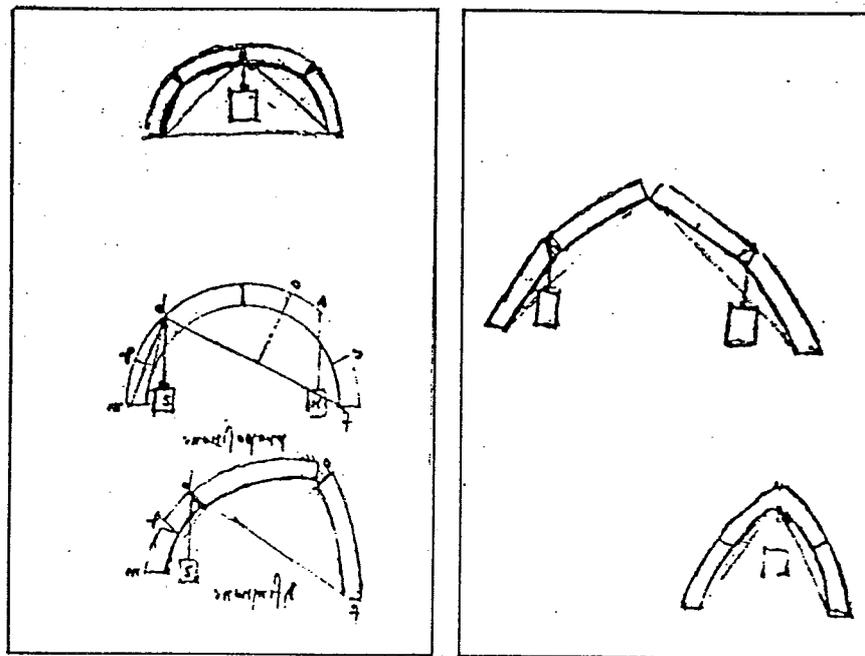
El análisis límite o a rotura de arcos y bóvedas, como hemos visto, nació a principios del siglo XVIII<sup>5</sup> y se desarrolló hasta finales del XIX. Para la segunda mitad de este siglo la aparición de nuevos materiales capaces de soportar tanto tracciones como compresiones, el hierro y más tarde el hormigón armado, impulsó el desarrollo de la teoría de las estructuras por el camino del análisis elástico<sup>6</sup>. A principios del siglo XX, ya no hubo nuevas aportaciones al tema del análisis a rotura de las estructuras de fábrica, si bien los métodos gráficos de líneas de empujes se siguieron empleando como alternativa al laborioso análisis elástico<sup>7</sup>.

---

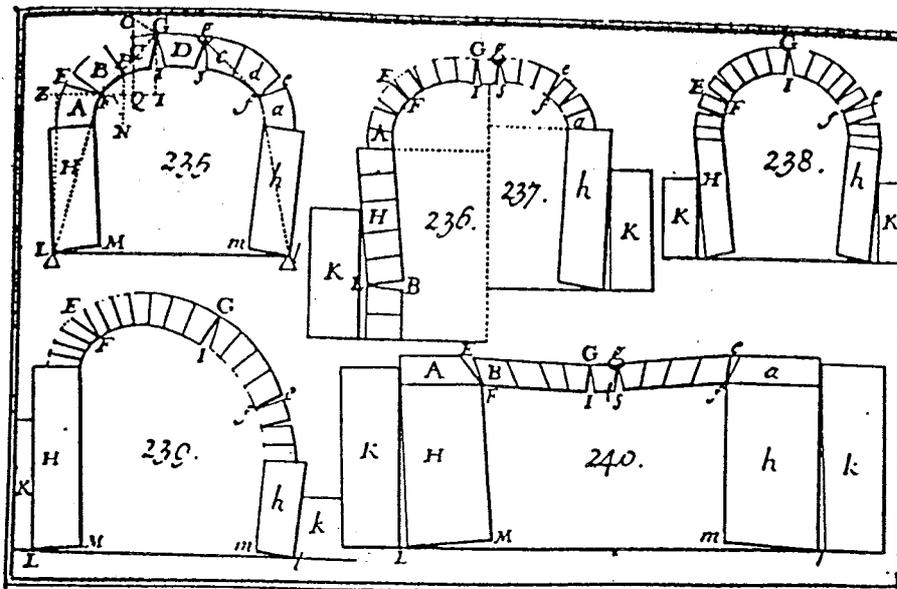
5. Podemos citar como la primera aportación al análisis límite o de rotura al análisis de arcos, la memoria del matemático francés La Hire: P. La Hire "Sur la construction des voûtes dans les edifices" *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1712: 69-78. El primer análisis a rotura de una cúpula fue realizado por tres matemáticos italianos en 1743 sobre la cúpula de San Pedro de Roma: T. Le Seur, F. Jacquier y R.G. Boscovitch *Parere di tre matematici sopra i danni, che si sono trovati nella cupola di S. Pietro* (Roma:1743).

6. Para un análisis de la influencia de los tipos y materiales estructurales sobre el desarrollo de la teoría de las estructuras véase H. I. Dorn, "The art of building and the science of mechanics: a study of the union of theory and practice in the early history of structural analysis in England", Ph.D. Diss., Princeton University: 1970, especialmente el capítulo 3 'Structural Modes' pp. 27-42. de donde cito textualmente (p.41): '...in response to the chief modes of building, it was both arch theory and flexure theory which formed the dominant concerns of investigators during the seventeenth, eighteenth and early nineteenth centuries and that studies of the arch lost their prominence in the theory of structures only when the introduction of structural iron invested flexure theory with new urgency.' (el subrayado es mío).

7. Sejourné en su monumental obra en 6 volúmenes *Grandes voûtes*, Bourges: 1913-16, donde hace un inventario de todos los grandes arcos de fábrica de más de 40 m, realiza al final de la obra una comparación entre los distintos métodos de análisis disponibles y termina recomendando los procedimientos gráficos: "Le calcul est laborieux, rebutant: on y peut, sans s'en apercevoir de quelque temps, commettre de grosses erreurs. Le graphique fatigue moins; il se prête mieux à toutes les combinaisons de surcharges; avec lui, on voit. Tous deux viennent d'hypothèses inexactes: la précision du calcul y est fort inutile; celle du graphique suffit; il n'y a vraiment pas à s'inquiéter des décimales quand les entiers sont suspects." op. cit. tomo 3, pág. 358.

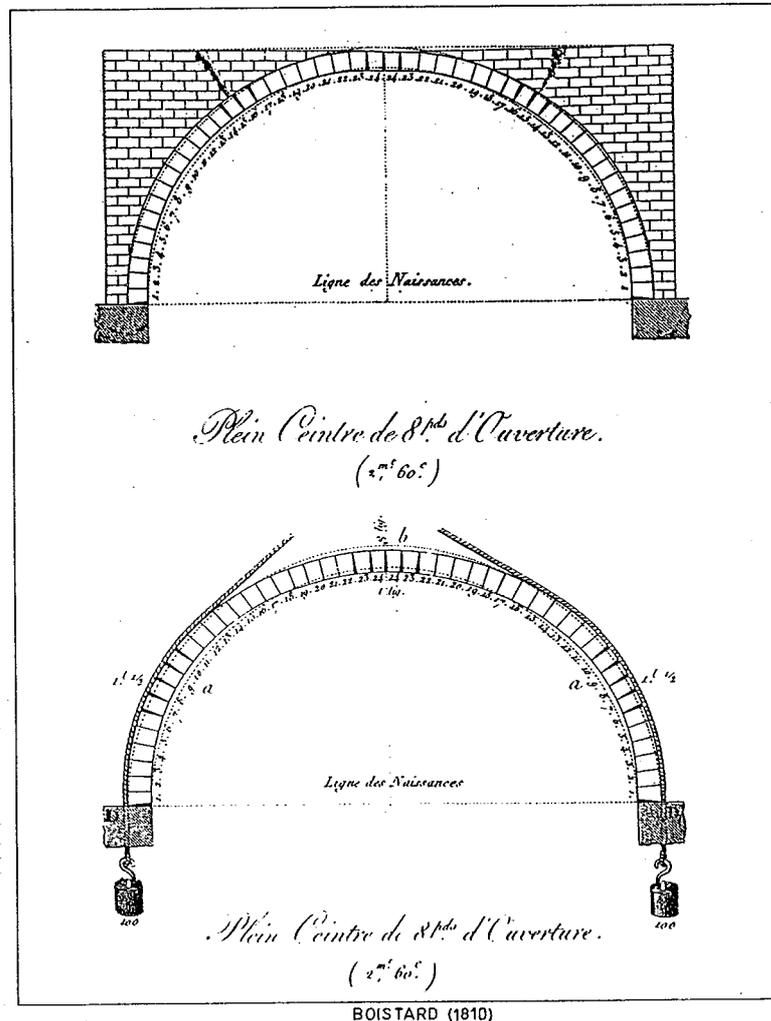


LEONARDO DA VINCI (≈1500)



DANIZY (1732)

**Figura 4.2. Primeros ensayos de colapso de arcos: Leonardo y Danizy.** Leonardo realizó numerosos experimentos sobre modelos de arcos. Tienen particular importancia los dibujos de las figuras (a) y (b) en los que aparece por primera vez representado el mecanismo correcto de colapso basado en la formación de rótulas. Este descubrimiento de Leonardo no tuvo ninguna influencia posterior dada la escasa, o nula, difusión de sus escritos. Hubo que esperar 200 años para que Danizy realizara en 1732 ensayos sobre pequeños modelos de escayola que ponían de manifiesto este modo colapso lo que confirmaba la hipótesis ya formulada por Couplet en 1730 de la imposibilidad de deslizamiento de las dovelas.



**Figura 4.3. Los ensayos sistemáticos de colapso de arcos de Boistard.** Alrededor de 1800 L. C. Boistard realizó los primeros ensayos sistemáticos sobre un gran número de modelos de arcos. Las dovelas estaban formadas por la unión de dos ladrillos pulidos por una de las caras y unidos por la superficie rugosa mediante escayola, que daba la curvatura. Para hacer todas las dovelas iguales se empleó un molde de escayola. Las dovelas se colocaban sobre una cimbra y la clave se realizaba 'in situ'. Boistard realizó un total de 24 modelos de arcos. Todos ellos tenían una luz constante de 2.6 m y la relación canto/luz también era constante e igual a 1/24. El colapso se provocaba haciendo descender la cimbra unos centímetros. En los casos en los que la proporción canto/luz de colapso era inferior a 1/24 se aplicó una carga puntual en la clave hasta que éste se produjo. Estos ensayos demostraron la imposibilidad del colapso por deslizamiento en las formas y proporciones de arcos más usadas y establecieron en toda la literatura posterior la preferencia por la hipótesis de colapso por formación de rótulas.

Por último, alrededor de los años 1920 se dejaron, prácticamente, de construir grandes arcos y bóvedas de fábrica.

Los puentes de fábrica continuaron en servicio a lo largo de este siglo sin despertar mucho interés hasta que, alrededor de 1940 el aumento del

peso de los vehículos y, en particular de los tanques durante la Segunda Guerra Mundial, obligó a plantearse de nuevo el problema de la resistencia de los arcos y bóvedas de fábrica.

Los primeros estudios estaban destinados a realizar simplemente comprobaciones de resistencia y utilizaban el método elástico suponiendo el arco biarticulado en sus extremos<sup>8</sup>. Los ya mencionados inconvenientes de este método y el desarrollo alcanzado ya en aquel momento por el método plástico de análisis de estructuras metálicas hicieron volver de nuevo el interés hacia los métodos de rotura y en particular, sobre la aplicación de los teoremas fundamentales, demostrados ya para estructuras metálicas, también al tema de los arcos<sup>9</sup>. En los últimos años ha habido un verdadero 'redescubrimiento' del análisis a rotura de las estructuras de fábrica que había permanecido hibernado durante 100 años<sup>10</sup>.

#### 4.3 Teorías del análisis a rotura: Hipótesis y Teoremas fundamentales

En la actualidad existen dos teorías fundamentales sobre el análisis a rotura de estructuras de fábrica:

---

8. A.J.S. Pippard y otros "The Mechanics of the Voussoir Arch" *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 4, 1936, págs. 281 y ss.; A.J.S. Pippard y R.J. Ashby "An Experimental Study of the Voussoir Arch" *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 10, 1938, págs. 383 y ss.; A.J.S. Pippard "The Approximate Estimation of Safe Loads on Masonry Bridges" *Civil Engineer in War*, 1948, págs. 365 y ss.

9. Los teoremas del análisis límite fueron demostrados por primera vez para vigas de un material plástico ideal por Greenberg y Prager *ASCE Proceedings*, Vol. 77, 1951, y para problemas y condiciones de fluencia más generales por Drucker, Greenberg y Prager *Quarterly of Applied Mathematics*, 9, 1952, y *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 73, 1951. Estos teoremas se aplicaron a arcos de un material perfectamente plástico por E.T. Onat y W. Prager *Limit Analysis of Arches*, Brown University Report All-69 to Office of Naval Research. No me ha sido posible encontrar estas fuentes que aparecen citadas por A. Koocharian "Limit Analysis of Voussoir (Segmental) and Concrete Arches" *Proceedings of the American Concrete Institute*, Vol. 49, 1953: 317-328.

10. Véanse las numerosas referencias posteriores a 1960 en el apartado C.1.1 de la bibliografía sobre monografías y artículos de revista sobre el análisis límite de estructuras de fábrica, especialmente las contribuciones de Jacques Heyman.

#### 4.3.1 Teoría de Kooharian/Heyman

Hemos llamado a esta teoría de Kooharian/Heyman pues si Kooharian fue el primero en aplicar las teorías del análisis plástico de pórticos de acero al análisis de arcos de fábrica, ha sido Heyman el principal impulsor de estos métodos a través de sus numerosas contribuciones en los últimos 20 años.

Para poder aplicar el análisis plástico a los arcos de fábrica es preciso partir de las siguientes tres hipótesis<sup>11</sup> :

1. La resistencia a compresión es infinita. Esta hipótesis implica que las tensiones son tan bajas en este tipo de construcción que no existe peligro de que el material colapse por falta de resistencia. El análisis del estado tensional en numerosas estructuras de fábrica justifica esta hipótesis<sup>12</sup> , si bien siempre es necesario realizar al final del análisis de rotura una comprobación de resistencia.
2. El colapso por deslizamiento es imposible. Supondremos que el rozamiento en las uniones es suficientemente alto para que los ladrillos o piedras no puedan deslizar unos sobre otros. Es posible encontrar casos de colapso por deslizamiento en estructuras de fábrica; sin embargo, estos pueden evitarse en casi todas las situaciones mediante una adecuada elección de los planos de corte<sup>13</sup> .
3. La resistencia a tracción es nula. Esta hipótesis va a favor de la

---

11. Véase H. Parland "Basic Principles of the Structural Mechanics of Masonry: A Historical Review" *International Journal of Masonry Construction*, Vol. 2, 1982, pág. 49.

12. Véase la Tabla 2.6 sobre tensiones de trabajo en las estructuras de fábrica de mayor tamaño y compárense con los valores de la Tabla 2.3 sobre resistencia de las fábricas. Dado que las tensiones crecen linealmente con el tamaño (en estas estructuras donde el peso propio es la acción más importante) estas estructuras podrían duplicar o incluso triplicar su tamaño sin problemas de resistencia.

13. El colapso por deslizamiento se producirá cuando la resultante forme un ángulo menor que el ángulo de rozamiento. Este varía según los tipos de piedras, morteros y ladrillos y varía entre los 25° y 40° (véase el cap.1 sobre los materiales). Como puede verse fácilmente, la práctica de realizar las uniones normalmente a la directriz del arco elimina prácticamente la posibilidad de este tipo de colapso en arcos de un canto normal.

seguridad puesto que sí existe una pequeña resistencia a tracción debida a la adherencia de los morteros, sin embargo, dado su pequeño valor es práctica habitual no considerarla, como hemos señalado repetidas veces en el capítulo sobre los materiales de las fábricas.

#### 4.3.1.a Teoremas fundamentales<sup>14</sup>

En base a los anteriores hipótesis es posible aplicar los teoremas del análisis plástico de estructuras de acero al caso de los arcos de fábrica. Existen dos teoremas fundamentales del análisis a rotura.

El primer teorema permite definir estados de cargas 'seguros'. Dice que *el colapso no se producirá si en cada estado sucesivo de carga que atraviesa la estructura es posible encontrar un estado de equilibrio estáticamente admisible.*

En el caso de los arcos implica que si podemos encontrar una línea de empujes estáticamente admisible dentro de la estructura el arco es seguro. 'Seguro' significa que el arco no colapsará y una línea de empujes 'estáticamente admisible' es aquella que es compatible con el estado de cargas de acuerdo con las leyes de la estática. Con este teorema podemos obtener un valor límite inferior de la carga de colapso.

Así pues, aplicando el primer teorema podemos obtener estados de carga seguros para un arco. Sin embargo, sería deseable saber el grado de seguridad, es decir obtener un valor límite superior de la carga de colapso.

El segundo teorema se ocupa precisamente de los valores de la carga que producen el colapso. Establece que *el colapso se producirá si puede encontrarse una configuración de colapso cinemáticamente admisible.*

Una estructura alcanza una 'configuración de colapso' cuando desarro-

---

14. La siguiente exposición está basada fundamentalmente en Kooharian, op. cit. más arriba.

lla el número suficiente de rótulas para convertirse en un mecanismo. Una configuración de colapso 'cinemáticamente admisible' se caracteriza porque en un desplazamiento virtual del mecanismo, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores es mayor o igual al realizado por las fuerzas interiores.

En el caso de los arcos de fábrica, dada la inexistencia de tracciones, el trabajo de las fuerzas interiores es cero, y el teorema adopta una forma más simplificada: el colapso se producirá, en una configuración de rotura determinada, si en un desplazamiento virtual el trabajo de las fuerzas exteriores es mayor o igual a cero, o, lo que es lo mismo, si el mecanismo resultante de la aparición de las rótulas está en equilibrio inestable.

#### 4.3.2 Hipótesis de Parland

Kooharian y Heyman aplicaron la teoría del análisis a rotura desarrollada para pórticos de acero a los arcos de fábrica. Esto es válido en la hipótesis de que el colapso se produce por formación de rótulas, es decir, si el deslizamiento es imposible.

Parland en un reciente artículo<sup>15</sup> ha desarrollado una teoría del análisis a rotura de estructuras de fábrica a partir de la mecánica clásica de los medios continuos. Partiendo de un enfoque distinto llega a demostrar también los teoremas fundamentales del análisis a rotura, si bien introduce la posibilidad de colapso por deslizamiento.

La teoría propuesta es una teoría lineal de la estabilidad de un sistema de sólidos rígidos en contacto seco y completo<sup>16</sup>. La teoría se basa en

---

15. H. Parland, "Basic principles of the structural mechanics of masonry: a historical review." *International Journal of Masonry Construction*, Vol. 2, 1982: 48-58.

16. El planteamiento recuerda por su abstracción y generalidad al realizado por Moseley en su definición de línea de empujes. Moseley afirmaba: "The equilibrium of the arch is a particular case of the equilibrium of a system of bodies in contact.", y publicó una memoria sobre el tema: "General conditions of the equilibrium of a system of bodies in contact" *Cambridge Philosophical Transactions*, Vol. 6, 1838, págs. 463-491.

las siguientes hipótesis fundamentales:

1. La fábrica se compone de un conjunto de sólidos rígidos de resistencia infinita ( $E = \infty$ ;  $\sigma_{rot} = \infty$ ). Esta hipótesis lleva implícita la de impenetrabilidad del material: dos puntos materiales diferentes no pueden ocupar la misma posición en el espacio. Este principio procede de la tradicional Mecánica de los Medios Continuos.
2. Resistencia a tracción nula en las juntas.

Estas hipótesis se traducen en las siguientes condiciones de contacto en las juntas:

- a. Las juntas de los sólidos rígidos presentan un indentado compatible con una superficie perfectamente lisa. Este indentado permite simular el rozamiento entre los sólidos en contacto. Cualquier deformación esta contenida dentro de un cono convexo definido por el indentado.
- b. El vector resultante de las sollicitaciones sobre la junta esta sujeto a las siguientes limitaciones: tiene que ser menor que cero (compresión) y tiene que estar contenido dentro del cono de rozamiento.
- c. Los conos de rozamiento y de deformación son polares, es decir, sus generatrices son ortogonales.

#### 4.3.2.b Teoremas fundamentales

Partiendo de estas premisas y aplicando el teorema de los trabajos virtuales al equilibrio del sistema, Parland establece la condición de equilibrio estable para un arco (teorema del límite inferior en el análisis plástico tradicional):

*Un arco es ciertamente estable para un sistema de cargas dado si existe al menos una línea de empujes contenida dentro de la fábrica y cuyas tangentes*

*están dentro del cono de rozamiento en cada una de las juntas.*

Esta proposición es válida en la hipótesis del 'rozamiento geométrico' conseguido mediante los indentados. En el caso en que consideremos un rozamiento real, que disipa energía, la teoría sólo se aplica para los casos extremos en los que el coeficiente de rozamiento es 0 ó  $\infty$  (en este último caso llegamos a los mismos resultados que Kooharian/Heyman).

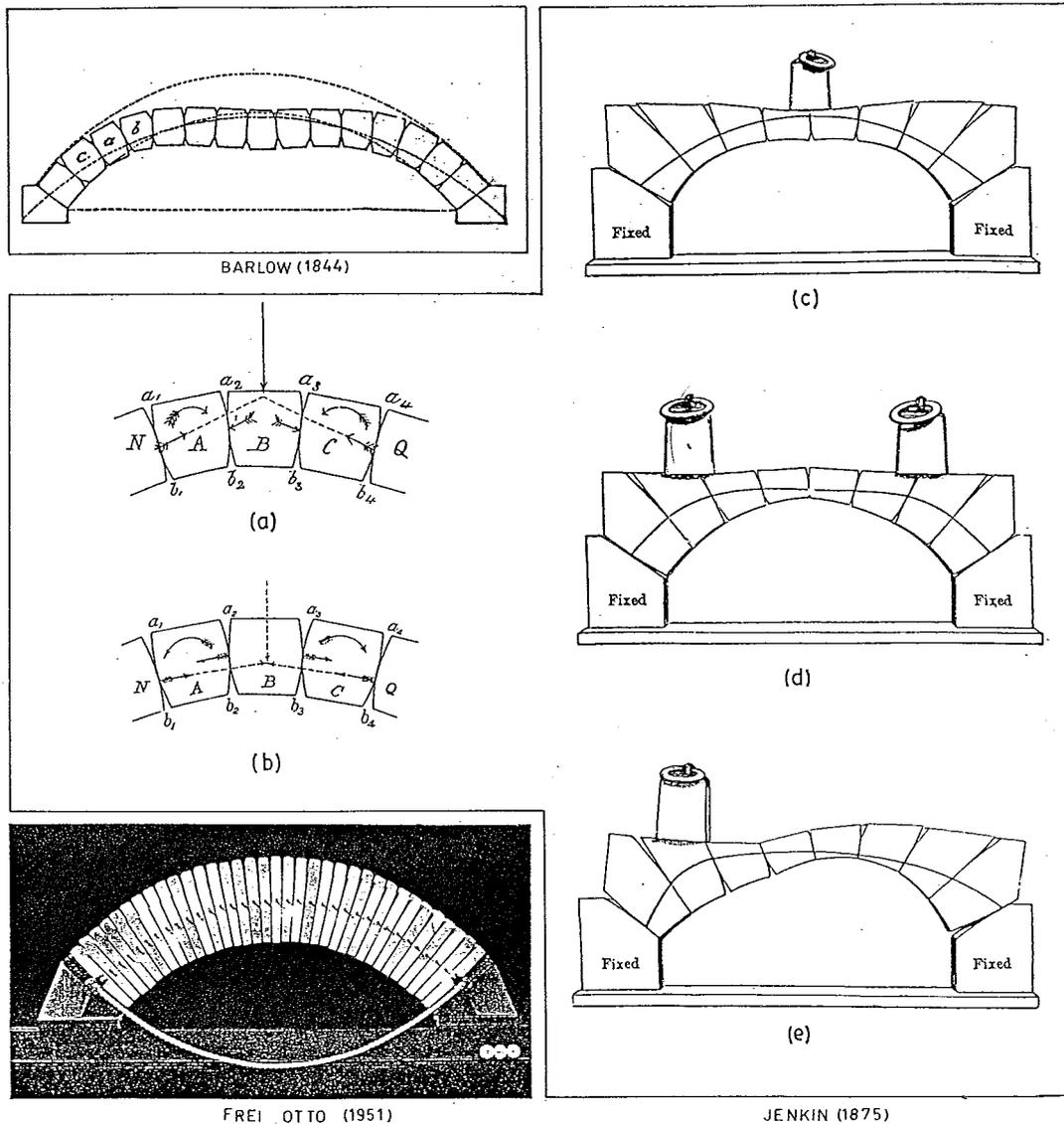
Si el rozamiento es disipativo el teorema anterior se modifica de la siguiente manera:

*Un arco es ciertamente estable si existe al menos una línea de empujes contenida por completo dentro de la fábrica cuyas tangentes en cada junta están dentro del cono de rozamiento, y si no existe ninguna línea de empujes dentro del arco que viola esta condición de rozamiento.*

La posibilidad de encontrar una línea de empujes que incumpla la condición de estabilidad al rozamiento solamente se da, según Parland, en los arcos de gran canto. Esta posibilidad se elimina reduciendo el espesor del arco, lo que se traduce no solamente en ahorro de material en el propio arco sino también en los contrafuertes, puesto que cuanto menos pesa el arco menor es el empuje.

Parland no hace ninguna proposición en cuanto a cuando un arco es 'ciertamente inestable', lo que correspondería al segundo teorema del análisis a rotura de Kooharian/Heyman.

Parece probable que la misma formulación sea válida, es decir, *un arco sería ciertamente inestable si podemos encontrar una configuración de colapso cinemáticamente admisible*. La diferencia consistiría en que la 'configuración de colapso' podría obtenerse no solamente mediante rótulas sino también por deslizamiento de unos sólidos respecto a los otros, o por una combinación de ambos mecanismos.

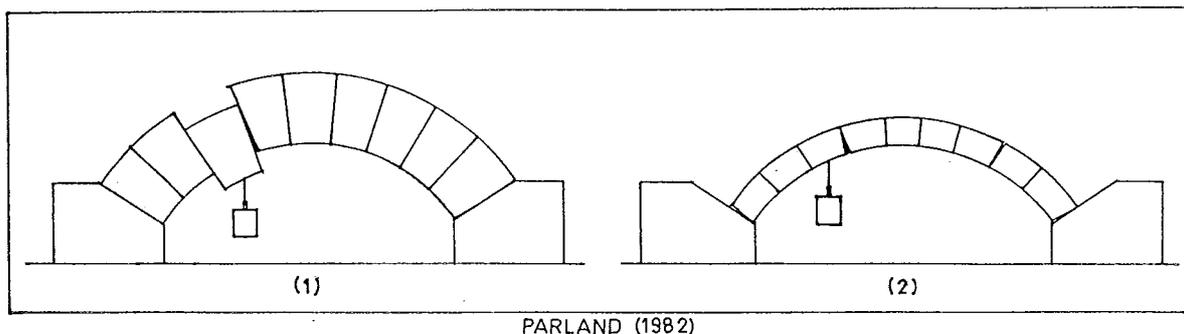


**Figura 4.4. Demostración experimental del primer teorema.** El primer teorema fundamental del análisis a rotura no fue demostrado rigurosamente hasta este siglo. Sin embargo, ya fue intuido en el pasado. Barlow<sup>17</sup> ya en 1844 propuso el experimento para demostrar que un arco era estable si existía una posibilidad de equilibrio. Jenkin<sup>18</sup> en 1875 diseñó la serie de ensayos de la figura para probar la misma afirmación. El modelo de Frei Otto<sup>19</sup>, 'inventado' en 1951, es otro ejemplo más del proceso de redescubrimiento de la teoría de los arcos de fábrica.

17. Op. cit. más arriba.

18. H. C. F. Jenkin, "Bridges." *Encyclopaedia Britannica*, 9th edition, Edinburgh: Adam and Charles Black, 1875-1888. Vol. 2, pp. 284-341.

19. F. Otto, "Der Bogen." *Arcus*, nº 2, nº 3, nº 4, 1983. pp. 71-81, 119-127, 199-207.



**Figura 4.5. Colapso por deslizamiento. Ensayo de Parland.** Los dibujos están basados en los ensayos sobre modelos realizados por Parland para demostrar la posibilidad de colapso por deslizamiento para arcos de gran canto con una carga puntual (1). El fallo puede evitarse reduciendo el canto del arco (2). Parland no da detalles sobre el material de que está hecho el modelo y sobre su ángulo de rozamiento. No parece probable que este tipo de colapso pueda darse con materiales como la piedra o el ladrillo con un ángulo de rozamiento mayor de  $\pi/4$ .

#### 4.4 Colapso de arcos. Rótulas plásticas. Ensayos sobre modelos

Si un arco está en equilibrio es porque contiene al menos una de las líneas de empujes compatibles con su geometría y con sus cargas. En un arco con una relación canto/ancho 'holgada' podemos dibujar infinitas líneas de empujes que estén contenidas dentro de las líneas de extradós e intradós. Si disminuimos el canto del arco o aumentamos las cargas la línea de empujes modifica su forma, se reduce el intervalo de curvas posibles dentro del arco y éstas empiezan a acercarse a las líneas de contorno.

En general, dado un arco y planteando las ecuaciones de su línea de empujes podemos llegar a deducir mediante tanteos sucesivos su forma de colapso. Sin embargo, dada la laboriosidad de este procedimiento matemático es preferible emplear métodos gráficos o, mejor aún, trabajar con modelos a pequeña escala. De hecho, si estudiamos la historia de la evolución del cálculo de arcos a rotura veremos que los ensayos sobre modelos jugaron un papel crucial en la selección de las hipótesis para la modelización matemática

correcta del problema y en la formulación del concepto de línea de empujes<sup>20</sup>.

#### 4.4.1 Colapso por formación de rótulas (Heyman/Kooharian)

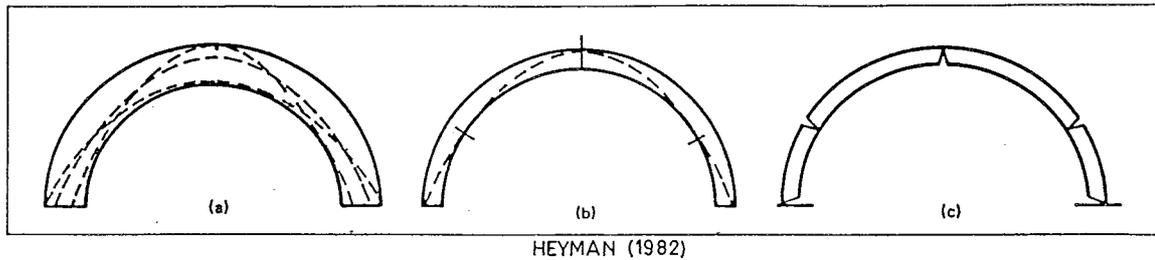
Consideremos un arco cualquiera sometido a su propio peso y supongamos que reducimos progresivamente su canto. A medida que las líneas de empujes se acercan a sus bordes las tensiones tienden a concentrarse en un área cada vez más pequeña que no presenta rigidez al giro, es decir, se forma una rótula.

Esto sin embargo no implica necesariamente que el arco colapse, simplemente sabemos que la línea de empujes pasa, necesariamente, por ese punto. Al seguir aumentando las cargas o disminuyendo la sección, la línea de empujes se aproximará en otro lugar a las líneas de intradós o extradós y se formará otra rótula, cuando su número alcance cuatro el arco se convertirá en un mecanismo y colapsará.

Este mecanismo de colapso sólo admite dos variaciones: vuelco de los riñones y levantamiento de la clave. En la Figura 4.7. aparecen los dos modos básicos de colapso: por hundimiento o por levantamiento de la clave. Aparecen dibujadas también otras posibles líneas de empujes.

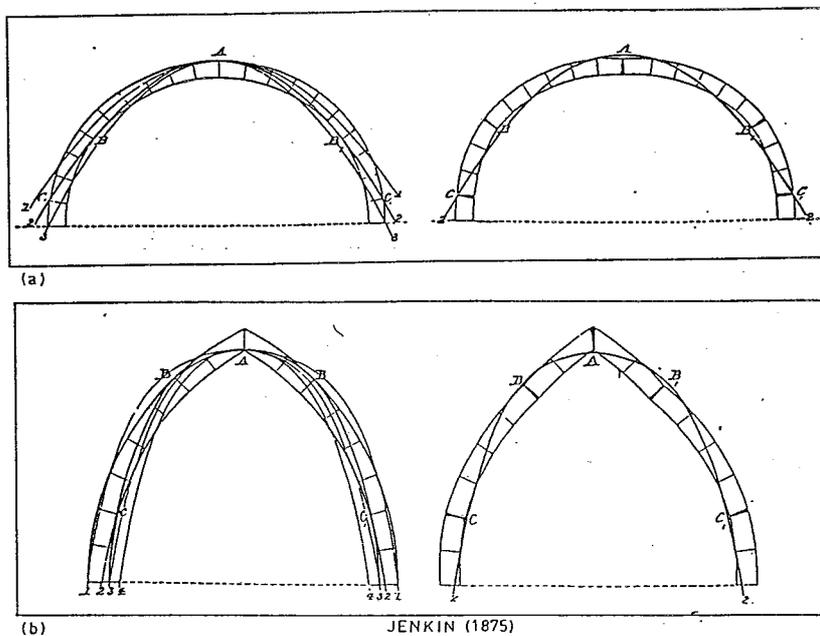
---

20. Los primeros ensayos sobre arcos de los que se tiene constancia escrita fueron realizados por Leonardo que ya descubrió el mecanismo correcto de las cuatro barras, véase su "Tratado de Estática y de Mecánica" Biblioteca Nacional, Madrid, Mss. 3076, folios 139-40. La siguiente referencia aparece en el libro de Gautier *Dissertation sur l'épaisseur des culées des ponts...* (Paris: 1717), págs. 372-375, que dedujo de sus ensayos, mal planteados, una fórmula geométrica análoga (aunque peor) a la de Derand/Blondel. De La Hire formuló en 1712, "Sur la construction des voûtes...", *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1712: 69-78, la primera hipótesis de colapso basada en el mecanismo, erróneo, de la cuña. Couplet en su "Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes" *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1730: 117-141, fue el primero en suponer la imposibilidad de deslizamiento entre las dovelas y en emplear, por tanto, el mecanismo de colapso de las cuatro barras. Los primeros ensayos sistemáticos que pusieron de manifiesto la bondad de esta hipótesis los realizó Danizy, "Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer à la poussée des voûtes" *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier*, 2, 1732: 40-. Estos ensayos, sin duda, eran conocidos por Coulomb (que alude a ensayos sin citar procedencia) cuando escribió el capítulo de arcos en su famosa memoria de 1773. Por último, Boistard *Recueil de divers expériences...* (Paris: 1802), realizó los ensayos 'definitivos' sobre modelos ya de escala considerable (luz de 2.6 m) que establecieron la hipótesis del mecanismo de cuatro barras en toda la literatura posterior sobre análisis de arcos y bóvedas.



HEYMAN (1982)

**Figura 4.6. Proporciones de colapso de un arco.** (a) Un arco de suficiente canto sometido a su propio peso puede contener una familia de infinitas líneas de empujes. A cada una de ellas corresponde un valor del empuje, que está, por tanto, acotado entre dos valores, uno máximo y otro mínimo. (b) A medida que reducimos el canto del arco se reduce el campo de variación de las líneas de empujes. Cuando alcanza una determinada proporción límite solo hay una línea de empujes que puede estar contenida en el arco. (c) En este momento dicha línea es tangente en al menos cuatro puntos (pueden ser más en configuraciones simétricas) a las curvas de intradós y extradós. En estos puntos se forman rótulas; el arco se convierte en un mecanismo de barras en equilibrio inestable y colapsa.

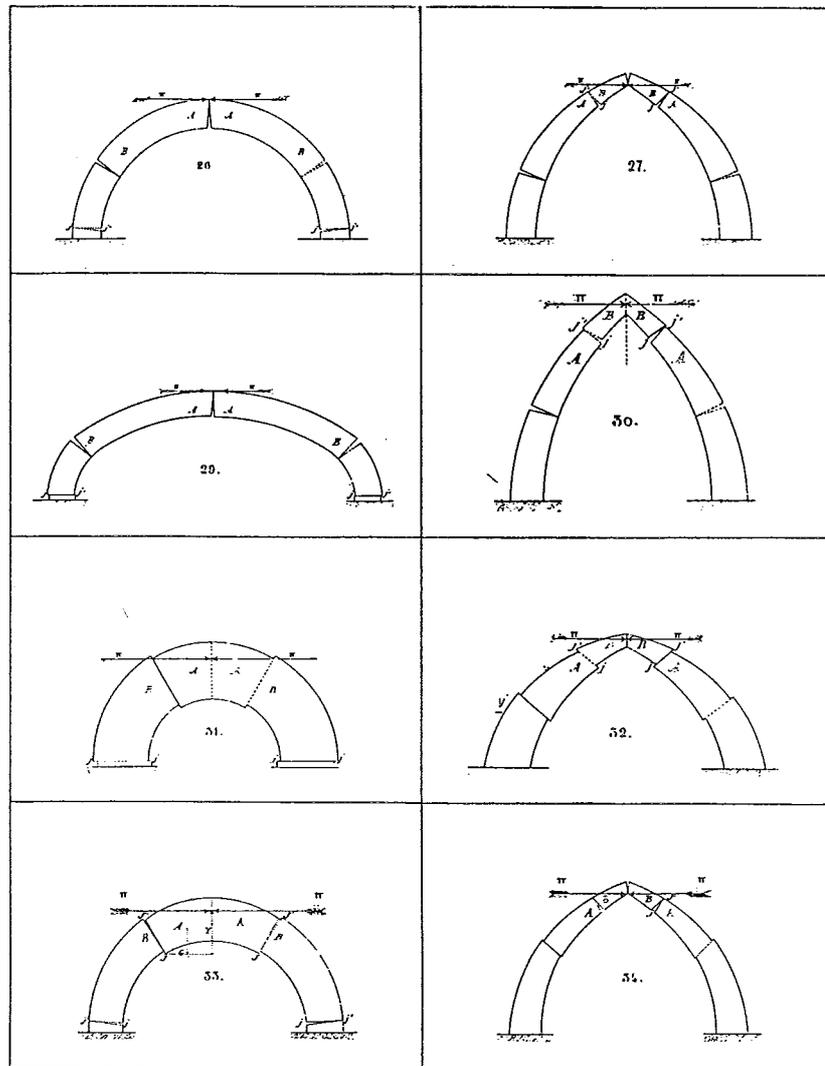


JENKIN (1875)

**Figura 4.7. Formas de colapso de arcos.** Existen dos formas fundamentales: (a) Descenso de la clave. Las rótulas se forman en el extradós en la clave y en la base, y en el intradós en los riñones. La posición de las dos primeras es bastante fija; la tercera se sitúa, dependiendo de las cargas, en un sector entre los  $30^\circ$  y los  $55^\circ$  a partir de la horizontal. En esta disposición, las dos piezas superiores empujan a las inferiores: la clave desciende y los riñones giran alrededor de las aristas exteriores. Este modo de colapso se presenta en la práctica totalidad de los arcos de medio punto, rebajados y adintelados. Se puede incrementar la estabilidad cargando los riñones. (b) Levantamiento de la clave. La posición de las rótulas es la inversa: en la clave en el intradós; en los riñones en el extradós y en la base en el intradós. Las partes inferiores empujan a las superiores: la clave sube y los riñones giran sobre las aristas interiores. Este modo de colapso es típico de los arcos apuntados. La estabilidad se aumenta cargando la clave.

#### 4.4.2 Formas generales de colapso (Parland)

En el apartado anterior hemos visto el proceso de colapso según el mecanismo de las rótulas. Si admitimos con Parland la posibilidad de deslizamiento los modos de colapso pasan de ser dos a ocho. En la Figura 4.8. se han representado, a modo de curiosidad, estos ocho modos de colapso posibles; los dos primeros corresponden a la teoría de Kooharian/Heyman.



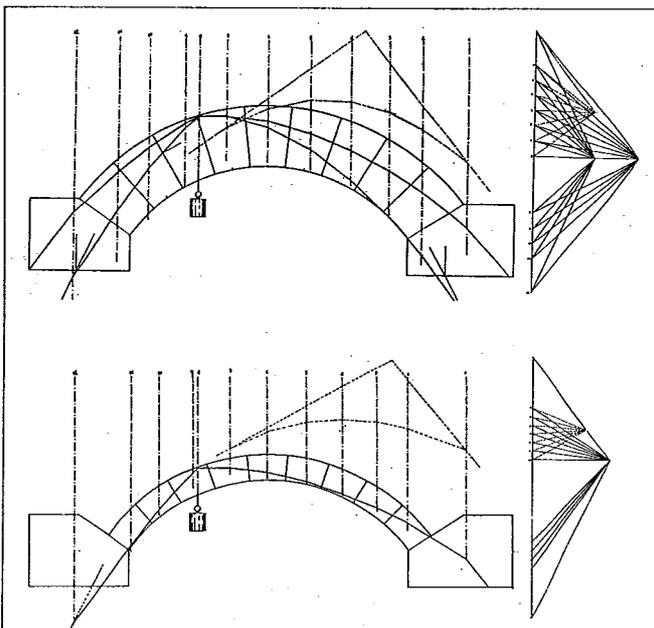
MICHON/SAAVEDRA (1860)

**Figura 4.8. Modos generales de colapso.** El empuje horizontal de una bóveda proviene siempre del peso de un segmento, comprendido entre la junta de rotura y el vértice, que tiende a caer hacia el interior de la bóveda (o a ser levantado hacia el exterior), sea por rotación o por traslación/deslizamiento. Para cada una de las dos maneras de empuje hay cuatro modos de resistencia, y por consiguiente, ocho modos de rotura para una bóveda cualquiera con estribos o sin ellos.

**4.4.3 Conclusiones: crítica de la teoría de Parland y elección de la teoría de Kooharian/Heyman**

Según la teoría de Parland para verificar la estabilidad de una bóveda tenemos que comprobar los ocho modos posibles de rotura. Esto sin embargo sería una pérdida inútil de tiempo dado que en la práctica (juntas normales al intradós, arcos delgados) el colapso se produce en casi la totalidad de los casos por formación de rótulas, como demostraron, como ya hemos visto, ya los ensayos de Danizy, Boistard, Gauthey, Rondelet, Dejardin, etc.

Por otro lado el buscar configuraciones de colapso según esta teoría lleva a resultados que contradicen la práctica constructiva: en efecto, para conseguir el colapso por deslizamiento tenemos que hacer que en uno o varios puntos la línea de empujes forme con las superficies de junta un ángulo menor del de rozamiento. Dado que este ángulo oscila entre los 30 y los 40° la única forma de conseguirlo es aumentar progresivamente el canto, aplicando al mismo tiempo fuertes cargas puntuales, o producir los cortes de una manera antinatural, buscando intencionadamente el fallo.



Para verificar la anterior afirmación, hemos repetido gráficamente el ensayo de Parland, véase Figura 4.9. Como puede verse, las posibles líneas de empujes más desfavorables cortan a las uniones de las dovelas, y a la base de los contrafuertes con ángulos que ni siquiera se acercan al ángulo de rozamiento de las fábricas.

**Figura 4.9. Verificación del ensayo de Parland**



## 4.4.3.a Los contrafuertes

Los contrafuertes constituyen prácticamente el único caso que se presenta habitualmente en el que es posible el colapso por deslizamiento. El empleo de las líneas de empujes debe hacerse con cuidado, dado que la elección del sistema de planos de corte influye sensiblemente en la forma de las líneas de empujes e inclinaciones. En este caso debe elegirse como familia de planos de corte la real, normalmente formada por planos horizontales paralelos.

Para el caso de un empuje horizontal (véase Figura 4.12. (a)), la línea de empujes se convierte en una línea recta vertical. Las inclinaciones se obtienen a partir del polígono de fuerzas. Como puede verse, la inclinación del empuje en la primera unión empezando por arriba se aproxima peligrosamente al ángulo de rozamiento.

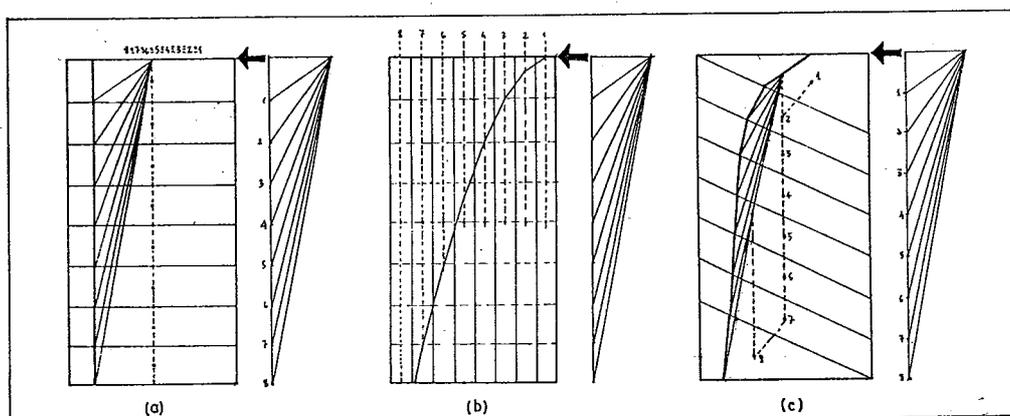


Figura 4.12. Contrafuerte con empuje horizontal: empujes e inclinaciones

En la Figura 4.12. (b) se ha estudiado la línea de empujes suponiendo un sistema de planos de corte verticales. El corte de la línea de empujes e inclinaciones (en el caso de planos y fuerzas verticales coinciden) con esta primera sección se produce con un ángulo superior a  $45^\circ$ , confortablemente por encima del límite. ¡Sin embargo, los empujes e inclinaciones reales son los de la figura (a)! Así, pues, para evitar sorpresas desagradables conviene, al

estudiar los contrafuertes, estudiar la línea de empujes teniendo en cuenta el despiece de la sillería.

Para obviar este problema existen dos caminos. El primero consiste en variar adecuadamente el sistema de planos de corte, y aparece representado en la Figura 4.12. (c). Obsérvese la modificación en la forma de la línea de empujes. Las inclinaciones no varían en forma absoluta (están representadas por el mismo polígono de fuerzas), pero sí en relación con los planos de corte, donde forman ya ángulos seguros en relación con el posible deslizamiento. Esta solución se ha empleado con frecuencia en los contrafuertes de los puentes de arcos muy rebajados.

El segundo método consiste en cargar el contrafuerte, para conseguir que los empujes se aproximen más a la vertical. Este es el procedimiento habitual seguido en la arquitectura tradicional, y constituye la base racional para el empleo de los pináculos en los arbotantes (véase Figura 4.13). El pináculo mejora algo la estabilidad del contrafuerte, pero, sobre todo, hace que las inclinaciones de los empujes tengan una pendiente considerablemente mayor.

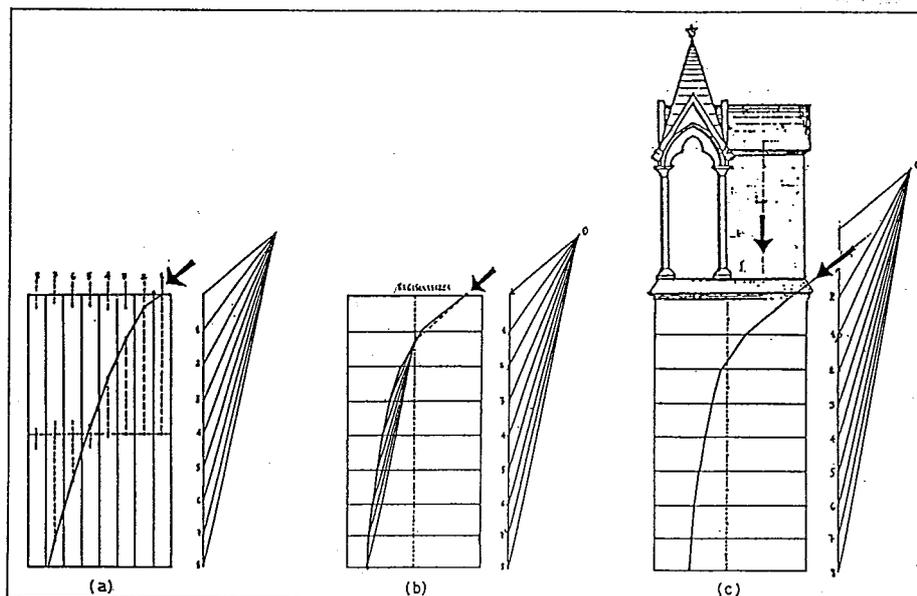


Figura 4.13. Contrafuerte con empuje inclinado: empleo de pináculos

#### 4.4.3.a Conclusión

Por lo dicho anteriormente, en lo sucesivo solamente consideraremos la posibilidad de colapso por formación de un mecanismo a base de rótulas (teoría de Kooharian/Heyman), para el caso de los arcos y bóvedas normales. En el estudio de los contrafuertes (o de casos especiales, como arcos de gran canto con fuertes cargas puntuales) se deberá contemplar la posibilidad de colapso por deslizamiento.

#### 4.5 Aplicación del primer Teorema: comprobaciones de estabilidad

El primer teorema fundamental del análisis a rotura nos permite conocer si un arco es estable: basta con encontrar al menos una línea de empujes compatible con las cargas que esté contenida entre las superficies de intradós y extradós. Es de particular interés para nosotros, ya que el presente estudio sobre el análisis de las estructuras de fábrica se dirige en último término a la verificación o comprobación de las reglas empíricas tradicionales de dimensionamiento de arcos, bóvedas y contrafuertes.

El procedimiento analítico consistiría en establecer la ecuación general de la línea de empujes y, por tanteo, encontrar una de estas línea de empujes que partiendo de algún punto de la clave alcance la base del arco sin cortar las líneas de intradós y extradós. Para ello podríamos realizar, por ejemplo, un programa de ordenador que comprobara todas las líneas posibles y que nos dijera si existe alguna que cumpla esta condición. Este proceso es largo y, en general, de alta complicación matemática, dadas todas las variables que intervienen.

Es posible realizar una comprobación mucho más rápida utilizando métodos gráficos o modelos. Los métodos gráficos se basan generalmente en las propiedades de los polígonos funiculares y en los modelos se suelen emplear

catenarias. El procedimiento consiste en descomponer el sistema de cargas, en general continuo, en un sistema de cargas puntuales equivalente. Para ello hemos de hacer hipótesis sobre el sistema de planos de división y sobre la forma de acción del relleno si lo hubiera. A continuación discutiremos ambos aspectos que son fundamentales para saber si las simplificaciones del modelo van a favor o en contra de la seguridad, en el caso de los arcos.

#### 4.5.1 Planos de corte verticales

Como hemos visto en el capítulo anterior en la hipótesis de cargas verticales y familias de planos de corte verticales, la línea de empujes se confunde con la de inclinaciones y coincide, además, con el antifunicular o catenaria invertida de las cargas.

La hipótesis de planos de corte verticales va a favor o en contra de la seguridad según el modo de colapso del arco: según que este se produzca por vuelco de los riñones o levantamiento de la clave. En la hipótesis de arcos 'delgados' puede verse que esto no es de gran importancia.

Puede conseguirse una mayor 'precisión' en el método si al establecer el sistema de cargas puntuales equivalente tenemos en cuenta la descomposición del arco en dovelas. Si hay relleno a cada dovela se le asigna la parte de carga vertical que 'entra' dentro de su extradós. En este caso la línea de empujes se aproxima más a la real pero no llega a coincidir; para ello las dovelas tendrían que estar cortadas de manera que su centro de gravedad estuviera contenido en la línea media del arco.

#### 4.5.2 Forma de acción del relleno

Otro aspecto fundamental a considerar es el de la acción del relleno sobre el arco o bóveda en cuestión. Si bien en la gran mayoría de los casos el

suponer la acción vertical es más que suficiente, en casos especiales va en contra de la seguridad y permite explicar algunos colapsos ocurridos en estructuras.

#### 4.5.2.a Distintas hipótesis

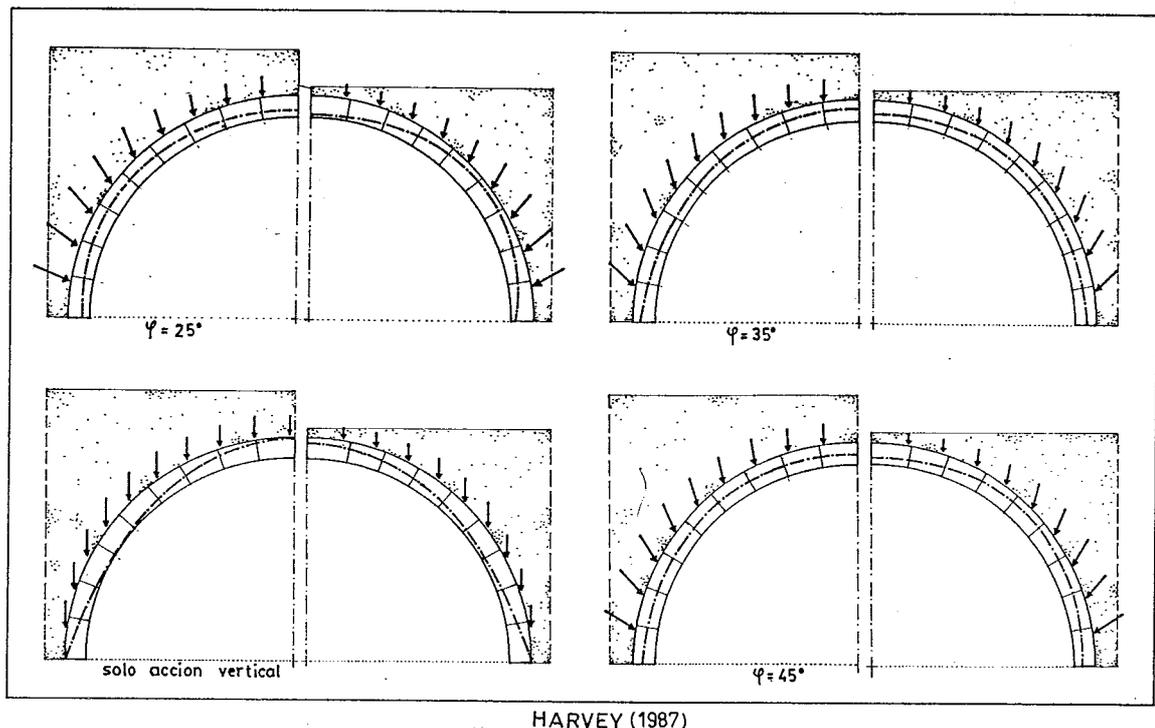
Acción vertical: Se supone que la acción del relleno se ejerce verticalmente sobre la parte de extradós situada inmediatamente debajo. Esto parece evidente en las zonas de poca inclinación, pero superado el ángulo de rozamiento entre el relleno y la piedra no parece una hipótesis muy plausible.

Acción hidrostática: Otra hipótesis que se ha considerado ha sido la de asimilar el relleno a un líquido que tiene la misma forma y densidad que la fábrica que está sobre los riñones. En esta hipótesis la acción del relleno se traduce en una presión que es, en cada punto, normal a la superficie del extradós y cuya magnitud es igual a la que se produciría en la base de una columna de material de altura igual a la distancia vertical entre dicho punto y el plano superior que delimita el relleno. El primero en plantear esta hipótesis fue Bossut en el siglo XVIII, y, posteriormente, los estudios de Yvon Villarceau y Saint Guilhem<sup>22</sup> en el siglo pasado partían también de esta suposición.

Acción geostática de Rankine: En este caso se tiene en cuenta el empuje del terreno y la variación de éste con la profundidad y la inclinación de la curva de extradós.

---

22. Véase A. Yvon Villarceau "Sur l'établissement des arches de pont envisagé au point de vue de la plus grande stabilité." *Institut de France, Académie des Sciences, Mémoires présentées par divers savants*, 12, 1854, pp. 503- ; y P. Saint-Guilhem "Sur l'établissement des arches de pont assujetties aux conditions du maximum de stabilité" *Annales des Ponts et Chaussées*, Vol. 17, pp. 83-106.



**Figura 4.14. Influencia de la acción del relleno en la estabilidad**

El desarrollo teórico más completo y general hasta la fecha sobre la influencia de la acción del terreno sobre la estabilidad de los arcos corresponde a Rankine. En su 'Manual of Applied Mechanics' y, más tarde, en su 'Manual of Civil Engineering', Rankine realiza una discusión completa del problema con relación a la forma de las líneas de empujes de los arcos. El punto de partida de su trabajo es el estudio de los 'arcos hidrostáticos', que corresponderían al grupo anterior, a partir de los cuales y mediante transformaciones geométricas deduce la forma de las líneas de empujes para los 'arcos geostáticos', aquellos en los que la presión sobre el extradós es la del terreno. La teoría de Rankine, como en muchos casos en relación con su obra, no tuvo apenas influencia posterior. Únicamente, existe un trabajo muy reciente en el que se

han aplicado los conceptos de empuje pasivo y activo del suelo de Rankine<sup>23</sup>, aunque en el desarrollo no se han tenido en cuenta los trabajos anteriores del propio Rankine.

#### 4.5.2.b Discusión sobre las distintas hipótesis

La mayor o menor seguridad depende, como en el caso anterior, de la forma de colapso del arco:

Vuelco de los riñones: El comportamiento del suelo produciendo empujes no verticales tiende a asegurar la estructura en el caso de colapso por vuelco de los riñones, por lo que en estos casos la hipótesis de acción vertical va a favor de seguridad.

Levantamiento de la clave: En el caso de colapso por levantamiento de la clave, sin embargo, los empujes horizontales tienden a levantar más la posición de la línea de empujes en la clave y su efecto es, por tanto, desfavorable.

En conclusión, la hipótesis de acción vertical va a favor de seguridad en la gran mayoría de casos prácticos y su validez ha quedado demostrada en la práctica por su continua aplicación a lo largo del siglo pasado y comienzos de éste. Sin embargo, en casos especiales donde se prevea el colapso por levantamiento de la clave, por ejemplo en suelos anegados y arcos apuntados o muy rebajados, será preciso considerar la hipótesis de Rankine sobre la acción del relleno.

---

23. W. J. Harvey y F. W. Smith "Semicircular arches" *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part 2, **83**, pp. 845-849.

#### 4.5.3 Métodos gráficos

Los métodos gráficos permiten obtener con facilidad líneas posibles de empujes a partir de los sistemas de cargas que se deducen de las hipótesis preliminares (planos de corte, actuación del relleno), y son, por tanto, especialmente adecuados a los trabajos de verificación de estabilidad de arcos o bóvedas existentes.

El primer método gráfico fue propuesto por Méry en su memoria sobre líneas de empujes; por su claridad y sencillez es, probablemente el que ha gozado de mayor difusión. No es un método puramente geométrico pues los sistemas de cargas se calculan aritméticamente. Poncelet desarrolló un método puramente geométrico de un alto nivel de generalidad, que, quizá debido a su complicación, no gozó de tanta difusión como el de Méry. Por último es preciso citar el método propuesto por Fuller que permite comprobar todos las posibles líneas de empujes para un arco dado. A continuación veremos los métodos de Méry y Fuller, con vistas a su posterior aplicación en la verificación de las reglas empíricas.

##### 4.5.3.a Método de Méry

Méry, como hemos visto, fue simultáneamente con Moseley quien definió por primera vez el concepto de línea de empujes. Moseley dió al tema un tratamiento altamente matemático; por el contrario Méry aportó un procedimiento geométrico de extraordinaria sencillez, que fue adoptado inmediatamente. El método originario de Méry no utilizaba el polígono funicular, pero los desarrollos posteriores incorporaron rápidamente este concepto, siendo de destacar la obra de Cullmann.

El método consiste en esencia en lo siguiente. Sabemos que para los arcos el antifunicular de las cargas se aproxima con precisión suficiente a

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

la línea de empujes correspondiente; por otro lado, según el primer teorema fundamental del análisis a rotura, si existe una línea de empujes (i.e. polígono funicular) contenida dentro del arco éste es estable. Se trata, pues, de averiguar de forma gráfica si esto es posible. Dado un sistema de cargas existen infinitas soluciones posibles de equilibrio, infinitos polígonos funiculares. El sistema queda determinado fijando tres puntos de paso del polígono (dos en los casos de simetría).

El procedimiento aparece descrito en detalle en cualquier manual de estática gráfica<sup>24</sup>, pero lo resumiremos brevemente para el caso de una bóveda de cañón simétrica sometida a su propio peso y un relleno sobre su extradós. Sea esta bóveda la ABCD de la Figura. 4.15. (a). Queremos saber si es estable. Por simetría trabajaremos sobre la mitad de la bóveda. En primer lugar la dividiremos en un cierto número de partes iguales, cinco por ejemplo.

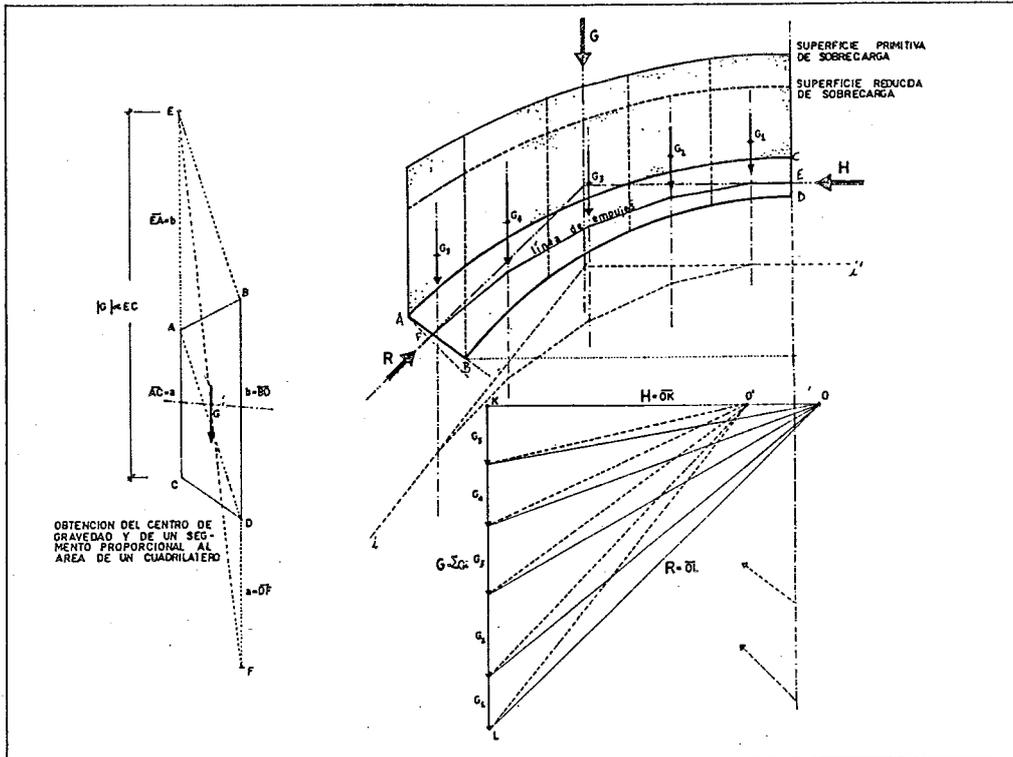
A cada uno de estas partes corresponde una porción de relleno en vertical. Hallamos la resultante, para cada elemento, de la parte de bóveda y de relleno.

De esta forma obtendremos un sistema de fuerzas  $G_1, G_2, \dots, G_5$ . Después hallamos la resultante de estas fuerzas,  $G$ , mediante el polígono funicular auxiliar  $i-i'$ .

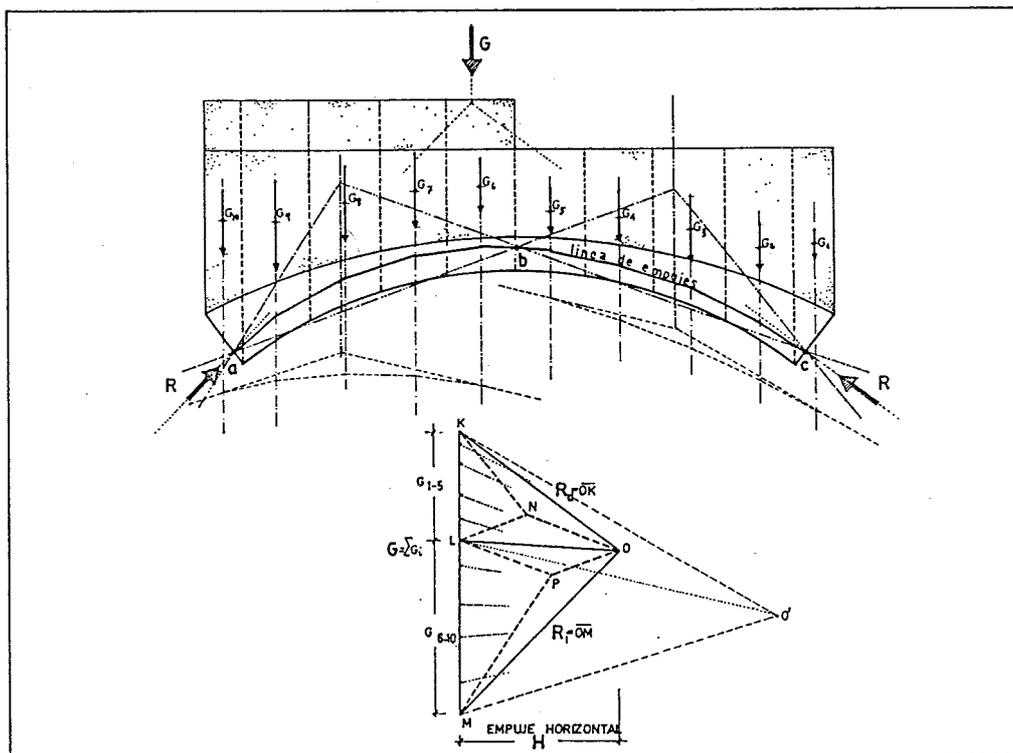
Fijaremos ahora los puntos de paso de la resultante. Dado que este tipo de bóvedas rebajadas con carga en los riñones tienden a colapsar por levantamiento de la clave, podemos imaginar que la línea de empujes se acercará al intradós en la clave y al extradós en los arranques. Fijamos, pues, los puntos de paso E y F. Trazamos una paralela  $n$  por E en la clave y, donde corta a  $G$ , unimos este punto con el punto de paso F en los arranques.

---

24. Para un excelente resumen de los métodos gráficos de análisis de bóvedas, véase: A. Föppl, *Die graphische Lösung technischer Aufgaben*, Leipzig: 1893, en particular el Cap. 8 "Die graphische Berechnung der Gewölbe.", págs. 62-75.



(a) BOVEDA SIMETRICA



(b) BOVEDA ASIMETRICA

Figura 4.15. Método de Méry: bóveda simétrica y asimétrica.

Esta operación nos define por completo la dirección del empuje horizontal y de la reacción en la base y, por tanto, del polígono funicular. Podemos ahora dibujar la línea de empujes y comprobar, que en este caso no sólo el arco es estable, sino que la línea de empujes está contenida en todos sus puntos dentro del núcleo central de inercia de las secciones.

En el caso de carga asimétrica, representado en la Figura 4.15. (b), el proceso se complica un poco más y, en ocasiones, es necesario realizar dos o tres tanteos. El procedimiento es análogo y no precisa de más explicación<sup>25</sup>.

### 4.5.3.b Método de Fuller/Heyman

El método de Méry permite encontrar con relativa facilidad situaciones de equilibrio para un arco o bóveda. Sin embargo, no da una idea del grado de estabilidad general; es decir, si el canto es excesivo, etc..., y hay que repetir el proceso completo para encontrar nuevas líneas de empujes. Además, tampoco sugiere mecanismos para dar una mayor estabilidad a una bóveda dada. El método de Fuller/Heyman da información sobre ambos aspectos, sin embargo, su comprensión no es tan inmediata como en el caso anterior.

El procedimiento se basa en la degeneración de los posibles funiculares en rectas. La primera contribución en este sentido, y en la cual se basó Fuller, apareció publicada por un autor anónimo en 1861<sup>26</sup>. Fuller generalizó el método y lo aplicó en su memoria de 1875 al trazado de la línea de empujes,

---

25. Véase, por ejemplo, un buen resumen en: J. M. Delbecq, J.M. *Analyse de la stabilité des ponts en maçonnerie par la théorie du calcul à la rupture*. Thèse: Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1983, ágs. 78-85. así como la obra de Föppl citada anteriormente.

26. "The Statics of Bridges." *The Civil Engineer and Architect's Journal*, Vol. 24, 1861, pp. 1-2, 60-65, 163-66, 223-26, 317-20 y 347-49.

una vez fijado sus puntos de paso por la teoría de la elasticidad<sup>27</sup>. Finalmente el método ha sido adaptado al análisis a rotura de arcos de fábrica por Heyman<sup>28</sup>.

Para una discusión completa nos remitimos a la bibliografía citada. No obstante daremos una descripción sucinta del método. Consideremos un arco, véase Figura 4.16. (a), y una de las posibles líneas de empuje correspondiente a una determinada posición del polo del polígono funicular. No es necesario que la línea sea una línea determinada, y podemos mover la posición del polo para buscar otras posibles.

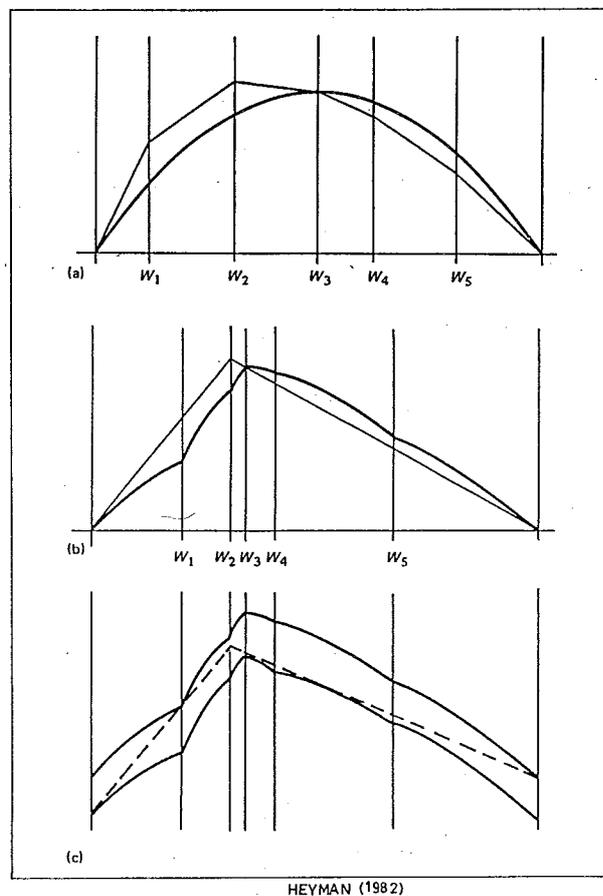
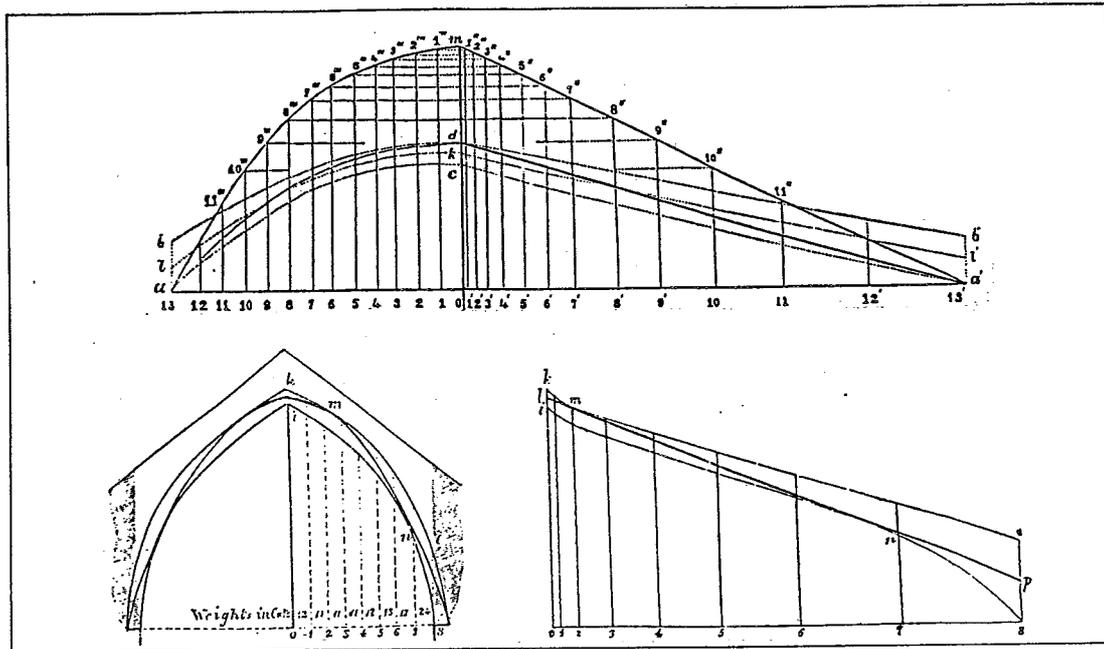


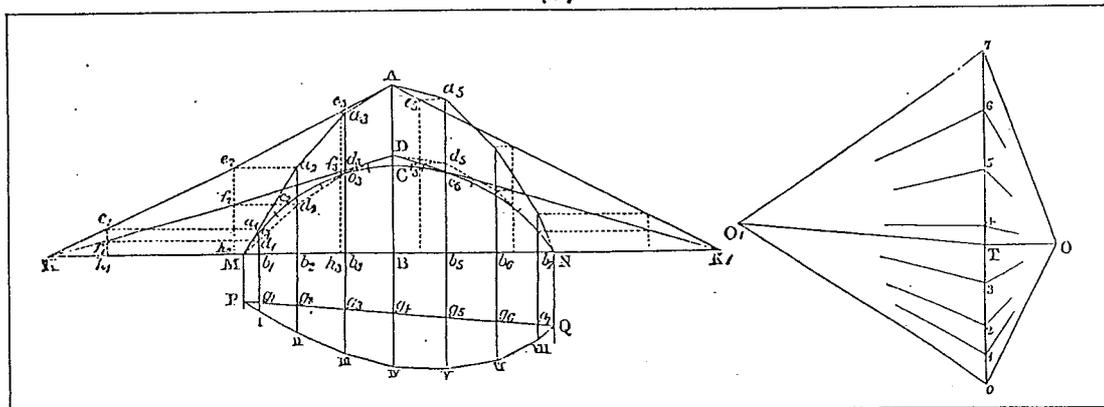
Figura 4.16. Degeneración de un polígono funicular.

27. G. Fuller "Curve of Equilibrium for a Rigid Arch under Vertical Forces." *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers* Vol. 40, 1875. pp. 143-149. El artículo determina el punto de paso de la línea de empujes en base a la teoría desarrollada por W. Bell "Stresses in Rigid Arches." *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 33, 1868, 78, 80.

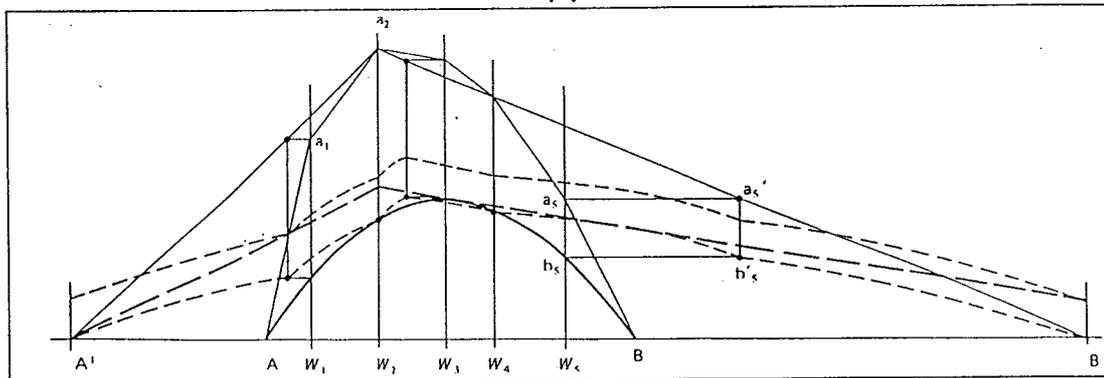
28. Véase: J. Heyman, *The Masonry Arch*, Chichester: Ellis Horwood, 1982, pp. 25-27. En la discusión que sigue hemos adoptado, con algunas modificaciones, el enfoque de Heyman.



(a) 1861



(b) FULLER 1875



(c) HEYMAN 1982

Figura 4.17. Método de Fuller/Heyman: evolución histórica.

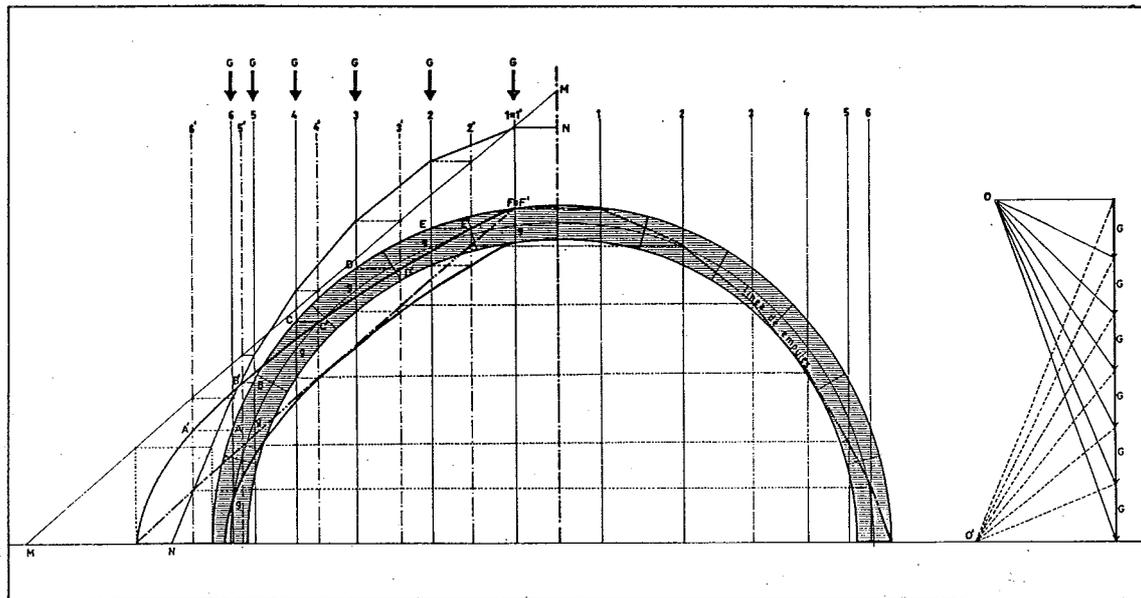
La Figura 4.16. (b), da la misma información que la anterior pero la escala horizontal se ha distorsionado de forma que la línea de empujes se ha convertido en dos líneas rectas, mientras que las líneas de extradós e intradós han tomado una forma curiosamente distorsionada, véase Figura 4.16. (c). Sin embargo, las distancias verticales entre puntos homólogos no han variado. Como se demuestra por las propiedades de los polígonos funiculares, dado un sistema de cargas, una vez que hemos dibujado la forma distorsionada del arco, cualquier polígono estará representado por otras dos rectas. Como puede apreciarse, dado el suficiente grosor del arco es posible dibujar infinitas líneas de empujes en su interior (Figura 4.16. (c)).

En la Figura 4.18., se ha dibujado a una escala mayor y con mayor detalle, la aplicación de este procedimiento a los casos de carga simétrica y asimétrica. Consideremos el primero de ellos. El polígono funicular  $Aa_1a_2 \dots B$ , se ha elegido arbitrariamente, imponiendo únicamente la condición de que pase por  $N$  y  $N$ . El valor del empuje  $H$  es, en consecuencia, arbitrario. Distorsionamos el citado polígono: para ello elegimos dos puntos cualesquiera  $M$  y  $M$  sobre la línea de base y los unimos con el punto más alto del polígono. El homólogo del punto  $A$  del extradós se convierte en  $A'$ ; análogamente realizamos la operación para un número suficiente de puntos, hasta que obtenemos las transformadas de las curvas de extradós e intradós. Dado que la escala vertical no se deforma podemos dibujar también el núcleo central de inercia y saber, de esta manera, si es posible dibujar al menos un polígono funicular dentro, para que no haya tracciones. Para el caso de carga asimétrica el procedimiento es el mismo, aunque un poco más largo.

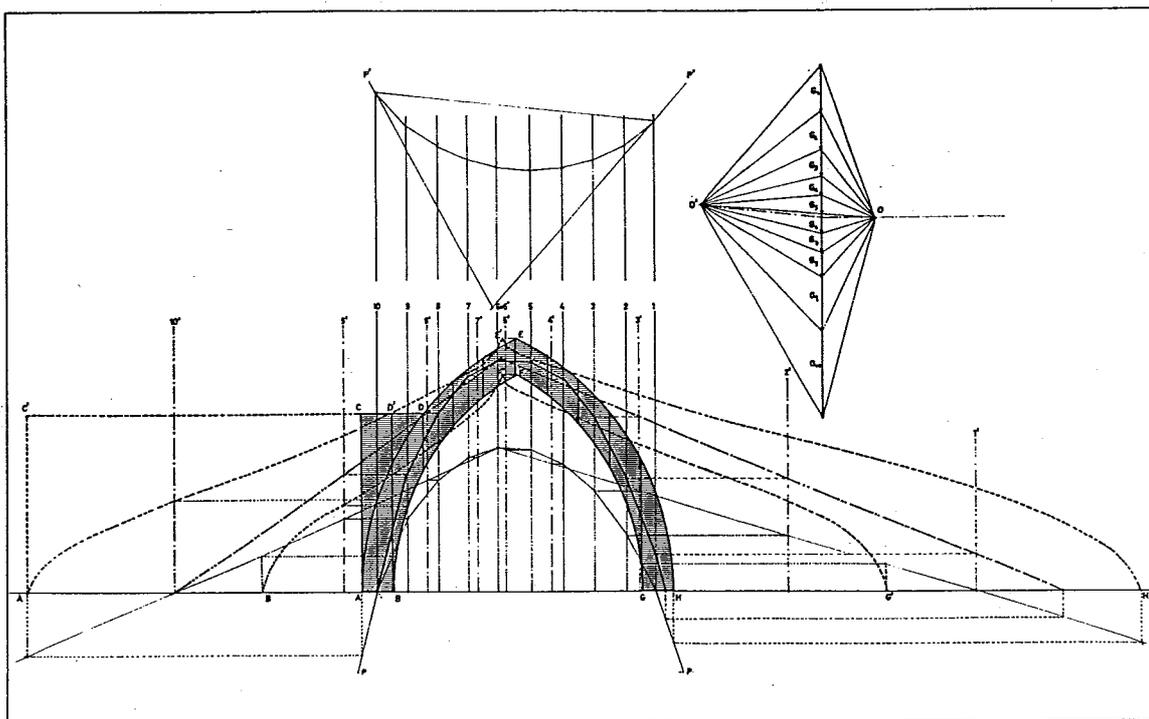
La construcción de Fuller/Heyman nos permite, además, poder intuir cuál sería la manera de cargar un arco para darle mayor estabilidad. Así, en la Figura 4.17. (a), extraída de la primera memoria citada de 1861, podemos

ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

observar como para el caso de un arco apuntado la transformada del arco se 'levanta' en la clave y se 'hunde' en los riñones, indicando que es preciso cargar ambos puntos.



(a)



(b)

Figura 4.18. Método de Fuller/Heyman: bóveda simétrica y asimétrica.

#### 4.5.4 Métodos experimentales: la catenaria y los modelos a escala.

Otro método de conocer el grado de estabilidad de una bóveda (o incluso de un edificio) de fábrica consiste en el empleo de modelos. Como hemos visto en este caso el problema fundamental es de estabilidad, i.e. que la(s) línea(s) de empujes estén contenidas siempre dentro de la masa del edificio. Dado que la acción fundamental en este tipo de estructuras es el peso propio, la condición de estabilidad depende de las posiciones relativas de los centros de gravedad. Esto justifica plenamente el empleo de modelos<sup>29</sup>.

##### 4.5.4.a La catenaria

Como hemos visto, en las hipótesis más habituales, el inverso de la catenaria de las cargas verticales coincide muy aproximadamente con la línea de empujes en un arco o bóveda. Esta propiedad permite realizar una comprobación extremadamente sencilla de la estabilidad de un arco: basta con realizar un dibujo a escala de su sección, invertirlo, y, mediante un hilo cargado con un sistema de cargas proporcional al real, intentar encontrar una posición del hilo cargado enteramente dentro de la sección. Además, y esto es muy importante, tenemos una idea del grado de estabilidad (si la catenaria se acerca a las líneas de intradós o extradós, significa que hay peligro de colapso). Para esta última comprobación podríamos dibujar incluso el núcleo central de inercia de cada una de las secciones.

El método data del siglo XVII: fue expuesto, como ya hemos visto, por primera vez por Hooke, posiblemente aplicado por Wren en el diseño de la cúpula de San Pablo, y explicado con gran claridad por Gregory.

---

29. En sus numerosas contribuciones sobre la estabilidad de las construcciones góticas Heyman ha señalado este hecho. Véase especialmente: J. Heyman "The Stone Skeleton." *International Journal of Solids and Structures* Vol. 2, 1966. pp.249-279.

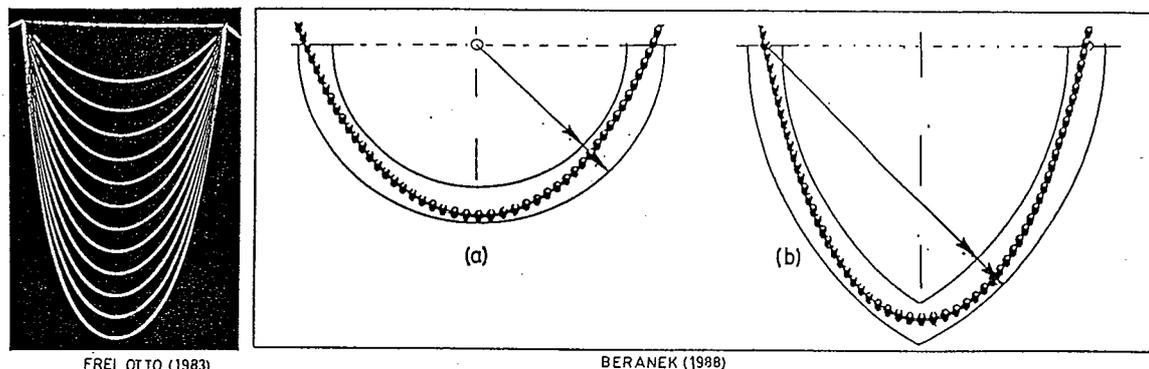


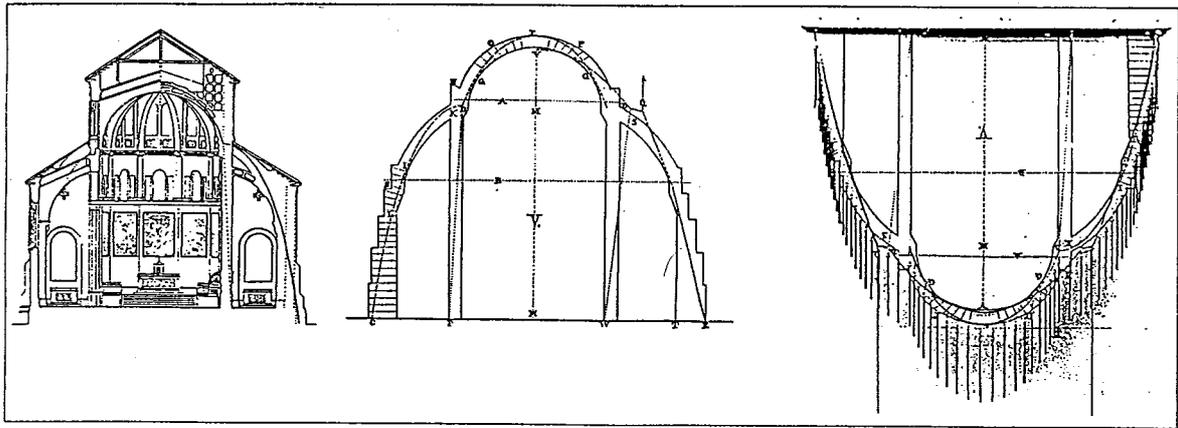
Figura 4.19. Comprobación de estabilidad empleando la catenaria.

Estos descubrimientos no pasaron desapercibidos a Poleni quien realiza la primera aplicación práctica del método, con un alto grado de perfección, a la comprobación de la estabilidad de la cúpula de San Pedro (véase Figura 1.2. (c)). Posteriormente, Perronet lo empleó para encontrar la forma del arco del puente de Neuilly, y, probablemente, Rondelet para definir la de la cúpula de Santa Genoveva.

Ya en el siglo XIX un arquitecto alemán, Hübsch, desarrolló el método como tal y lo aplicó para el diseño de las bóvedas y contrafuertes de la Iglesia Católica de Bulach y la Catedral del Obispado de Rottenburg en Württemberg. El método de Hübsch, incluido en su tratado, tuvo cierta repercusión en Alemania y ya aparece recogido en uno de los tratados de arquitectura más populares de la segunda mitad del siglo pasado, el de Breymann<sup>30</sup>. Por último, Heinzerling, dio carácter científico riguroso al método experimental en su memoria de 1869<sup>31</sup>.

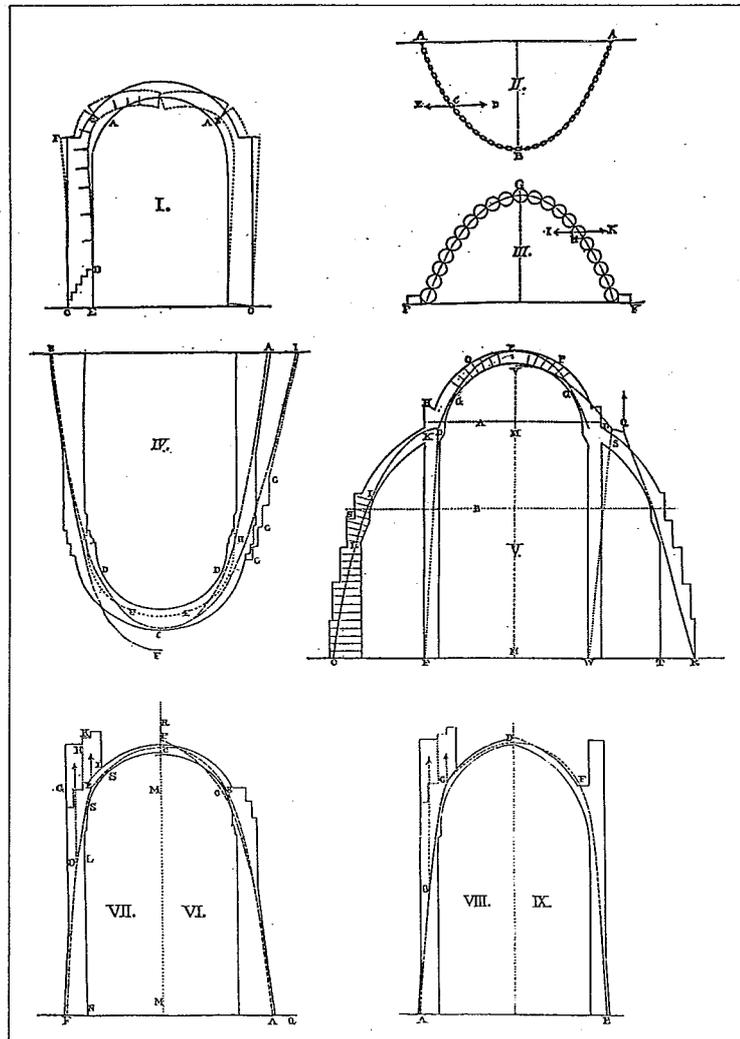
30. G. A. Breymann, *Allgemeine Baukonstruktionslehre mit besonderer Beziehung auf das Hochbauwesen. I Theil. Konstruktionen in Stein*. 4a Ed. 2 Vols. Leipzig: J.M. Gebhardt's Verlag, 1868.

31. F. Heinzerling, "Die Bauwaage und deren Ergebnisse für den Gewölbebau." *Zeitschrift für Bauwesen*, Vol. 19, 1869, pp. 89-110, láms. C y D. Quien cita los siguientes casos de empleo del principio de la catenaria: (anónimo) "Experimentelle Darstellung der Construction von Kirchengewölben." *Versammlung deutscher Architekten und Ingenieure zu Dresden*, Jahrgang 1854; Simons, "Über die Form und Stärke gewölbter Kuppeln, insbesondere derjenigen der Michaelskirche in Berlin." *Sitzungsprotokolle der 12. Versammlung deutscher Architekten und Ingenieure zu Frankfurt a.M.*, 1861.



HÜBSCH (1837)

Figura 4.20. Diseño de Hübisch para la katolische Kirche.

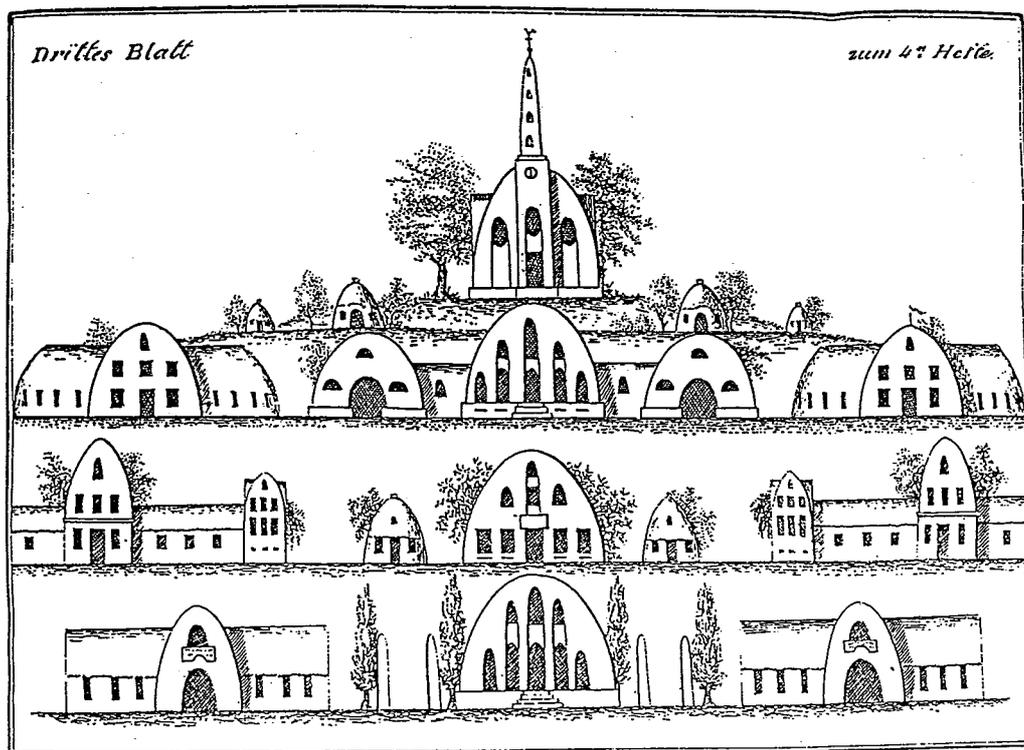


HÜBSCH (1838)

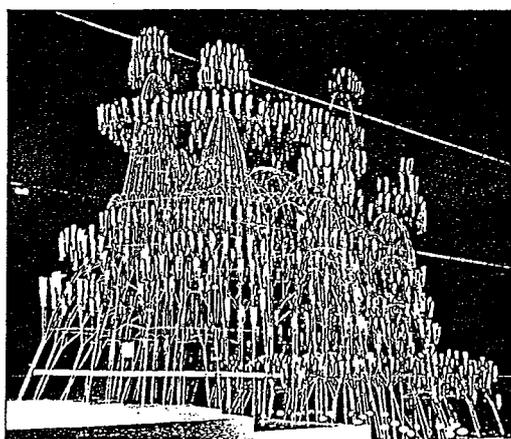
Figura 4.21. Ensayos de Hübisch

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

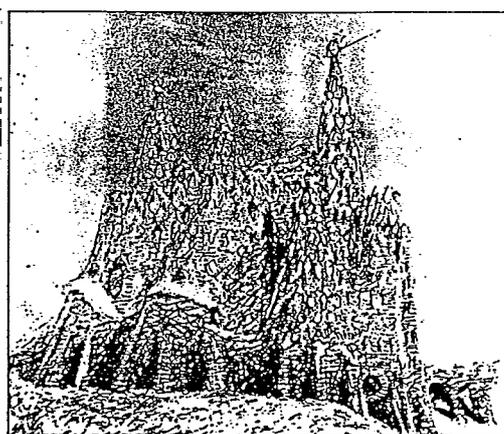
La fuerza visual del método no escapó a la sensibilidad de los arquitectos y Tappe basó en las formas catenarias resultantes su vocabulario formal. Más tarde, en este siglo, todavía puede verse su influencia en la arquitectura expresionista de Rudolf Steiner, y en España, tenemos en Gaudí quizá la expresión más desarrollada del empleo de figuras catenarias invertidas.



WILHELM VON TAPPE (1821)



(a)



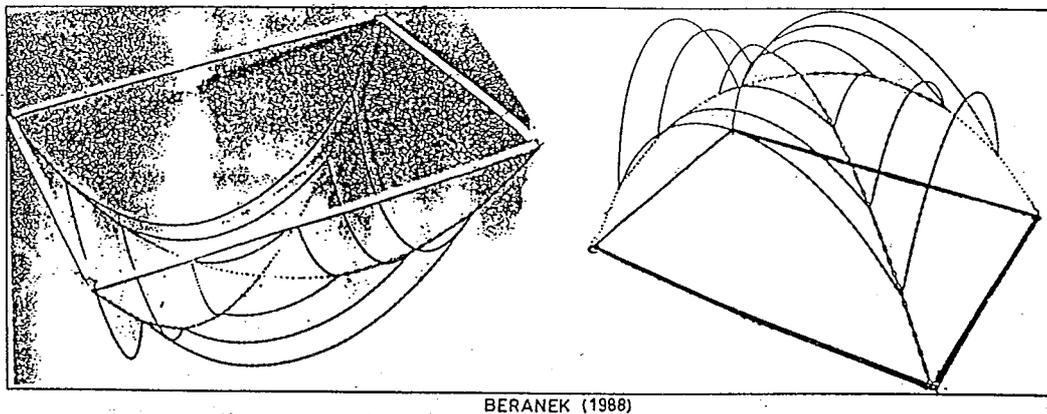
(b)

GAUDÍ (1898-1908)

Figura 4.22. Arquitecturas catenarias: Tappe y Gaudí<sup>32</sup>

32. Las ilustraciones están tomadas de, R. Graefe, "Zur Formgebung von Bogen und Gewölben." *Architectura*, Vol. 16, 1986. pp. 50-67.

El método anterior, extraordinariamente sencillo de ejecutar incluso con los medios más precarios (basta con un hilo y algunas tiras de plomo), no ha tenido sin embargo la difusión que hacía esperar, quizá por su aparente carácter no-científico. Sin embargo, no sólo permite realizar comprobaciones de estabilidad, sino que, como ha demostrado Gaudí, es una inmejorable herramienta de diseño. Incluso en la actualidad podía emplearse con provecho en numerosos estudios estructurales de obras de rehabilitación.



BERANEK (1968)

Figura 4.23. Bóvedas de crucería: empleo de la catenaria

#### 4.5.4.b Los modelos a escala

Las consideraciones teóricas anteriores dan carta de validez al empleo de modelos a escala para estudiar la estabilidad de los edificios de fábrica. Los modelos a escala se han utilizado desde la antigüedad. La primera referencia documental corresponde a la época griega, pero muy posiblemente fueron ya utilizados con anterioridad<sup>33</sup>. De la época medieval tenemos noticia de su existencia; algunos de ellos de gran tamaño. Este tipo de modelos podrían haber permitido a los constructores medievales sacar conclusiones sobre la

33. A. Petronotis *Zum Problem der Bauzeichnungen bei den Griechen*. Athen: Dodona Verlag, 1972. Citado por: D. Thode *Untersuchungen zur Lastabtragung in Spätantiken Kuppelbauten*. Dissertation: Universität Darmstadt, Fach. Architektur, 1975, pp. 6-7.

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

estabilidad del edificio real<sup>34</sup>. Por otra parte, sabemos que una de las partes del examen para acceder al grado de maestro en las logias alemanas era la construcción de un modelo a escala de la estereotomía de una bóveda<sup>35</sup>. En casos como el de la Catedral de Palma de Mallorca es inconcebible que la solución se haya podido alcanzar de otra manera<sup>36</sup>.

Ya en el renacimiento, hay que destacar el modelo realizado por Brunelleschi para la cúpula de Santa Maria del Fiore. Construido de ladrillo y de considerables dimensiones (alrededor de 7 metros de diámetro) le hubiera permitido a Brunelleschi sacar conclusiones sobre la estabilidad de la cúpula. De hecho Brunelleschi conocía perfectamente el funcionamiento estructural de las cúpulas de fábrica como queda claro de las especificaciones que redactó para la cúpula; sin embargo, no hay constancia documental de que el modelo le ayudara a sacar estas conclusiones<sup>37</sup>.

El representante por antonomasia del empleo de los modelos a escala para

---

34. Este es el caso de S. Petronio de Bologna cuyo modelos, construido de ladrillo y escayola, medía más de 18 m de longitud. Según Heyman "On the Rubber Vaults of the Middle Ages and Other Matters." *Gazette des Beaux-Arts* Vol. 71, 1968. pág. 185, "...Such a model can be used with complete confidence to check the stability of the whole or any part of the real structure..". Otros casos sobre el empleo de modelos en la arquitectura gótica aparecen mencionados en: P. Frankl *The Gothic: Literary Sources and Interpretations Through Eight Centuries*. Princeton: Princeton University Press, 1960. Citado por Heyman, *ibídem*.

35. Véase el término *Steinmetzen* [Estereotomía] en J. H. Zedler *Grosses vollständiges Universal-Lexikon Aller Wissenschaften und Künste...* Halle und Leipzig: Im Verlag Johann Heinrich Zedlers, 1735-1744, Vol. 39, pág. 1719. Cita el examen para maestro en la logia de Nürnberg, que incluía, por ejemplo, hacer dos bóvedas de crucería, una cuadrada de 24 pies de lado y otra de 24 por 16 pies.

36. Los pilares de esta Catedral tienen una esbeltez aparente (altura/diámetro de la sección) de 16. Dado que a media altura acomete el empuje de las naves laterales, la única forma de centrar la resultante dentro de la sección era cargar los pilares. En efecto, en la nave central, los arcos formeros están muy cargados como también lo está la clave de los arcos cruceros. Esto hace que la resultante que baja por el pilar sea un orden de magnitud superior al empuje de la nave lateral. Todos estos grandes pesos están en perfecto equilibrio. Para un análisis detallado del funcionamiento estructural de la Catedral, y del cual hemos tomado los datos para esta interpretación, véase: J. Rubió Bellver "Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca." *Anuario de la Asociación de Arquitectos de Cataluña*, 1912. pp. 87-140.

37. La más completa monografía sobre la cúpula es la de H. Saalman, Howard *Filippo Brunelleschi. The Cupola of Santa Maria del Fiore*. London: A. Zwemmer Ltd., 1980. Sobre el modelo véase pp. 58-68. Para una discusión sobre la validez estructural de las especificaciones redactadas por Brunelleschi, véase: H. J. Cowan "A History of Masonry and Concrete Domes in Building Construction." *Building and Environment* Vol. 12, 1977. pp. 1-24.

el estudio de la estabilidad de arcos, bóvedas y cúpulas, es Rondelet. En su monumental *Traité de l'Art de Bâtir*, dedica una parte sustancial del volumen 4 consagrado a las bóvedas y arcos a describir las numerosísimas experiencias que realizó con modelos. El objetivo de sus investigaciones era proporcionar reglas de diseño para todo tipo de arcos y bóvedas. Las reglas empíricas de Rondelet, como hemos visto en la Introducción, tuvieron una difusión extraordinaria y sirvieron como herramienta de diseño prácticamente única para las bóvedas compuestas, hasta bien entrado el presente siglo.

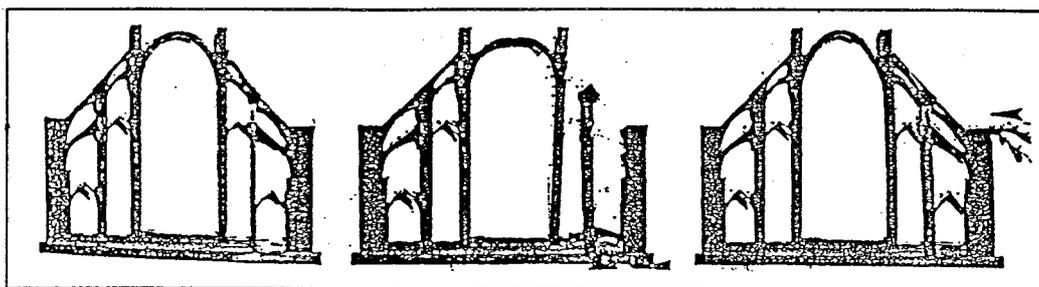
También a principios del siglo XIX un inglés, Bland<sup>38</sup>, en una obra no muy conocida, desarrolló por primera vez lo que puede considerarse como primeros rudimentos de la Teoría de Modelos.

Sin embargo, aunque los ensayos sobre modelos jugaron un papel capital en el desarrollo de la correcta teoría de colapso, fueron rara vez empleados durante el siglo XIX para comprobar la estabilidad de construcciones existentes o para diseño. Sin duda, una de las razones de su falta de popularidad es que estos ensayos no permiten valorar de forma inmediata el grado de estabilidad de la edificación (sabemos que es estable, pero no sabemos cuánto). Quizá otro motivo haya sido su elevado coste.

A pesar de todo, es posible realizar modelos equivalentes de bajo coste (en cartón o madera de balsa). El mayor problema en la realización de este tipo de modelos es la perfecta realización de las piezas (para que no tengan irregularidades que desvirtúen el ensayo) y su montaje en vertical. Beranek, véase Figura 4.24, ha empleado este sistema para estudiar la estabilidad de una sección de una catedral gótica, realizando varios ensayos con y sin arbotantes, etc.

---

38. W. Bland *Experimental Essays on the Principles of Construction in Arches, Piers, Buttresses, ... Made with a View to Their Being Useful for the Practical Builder*. London: John Weale, 1839.



BERANEK (1988)

Figura 4.24. Estudio de la estabilidad de un catedral gótica con modelos

Proponemos a continuación el siguiente método de nuestra invención (al menos no tenemos noticia de su empleo). El procedimiento es aplicable a cualquier bóveda o arco que pueda idealizarse por una sección plana. Consiste en realizar las piezas que componen el modelo de cartulina gruesa o cartón pluma (pueden dibujarse primero sobre su superficie y luego cortarlas con un cortatramas). Las piezas se montan luego sobre una superficie lisa que presente poco rozamiento con la cartulina (por ej.: un cristal) sobre una plantilla dibujada al efecto, en cuya parte inferior hay una base fija. Montada la estructura se procede a inclinar progresivamente el plano; mientras no se supera el ángulo de rozamiento las piezas permanecen sueltas; cuando éste se supera empiezan a afirmarse unas contra otras, por fin dando suficiente inclinación la fuerza del rozamiento se vuelve despreciable y la estructura funciona como si estuviera apoyada de pie y exenta. Este sencillo método nos ha permitido estudiar, con un mínimo coste material y de tiempo, los distintos modos de colapso de los arcos.

Por último, hay que citar un ingeniosísimo procedimiento debido a Frei Otto<sup>39</sup> que permite conocer el grado de seguridad de una estructura en relación

39. El método aparece descrito en: Frei Otto "Geschichte des Konstruierens. Was könnten die alten Baumeister gewußt haben, um Bauten entwerfen und bauen zu können?" *Arcus* no.1, 1986. pp. 35-46. El procedimiento parece enteramente original y no hemos tenido noticia de ningún precedente.

a la acción de fuerzas horizontales, viento o sismo. Consideraremos este caso en primer lugar, siguiendo el desarrollo de Frei Otto.

En primer lugar, hay que señalar que la estabilidad de las estructuras de fábrica a sismo depende fundamentalmente de la forma geométrica, i.e. de las proporciones entre las distintas partes del edificio, y es independiente del tamaño y de la masa (a partir de 2 m aproximadamente).

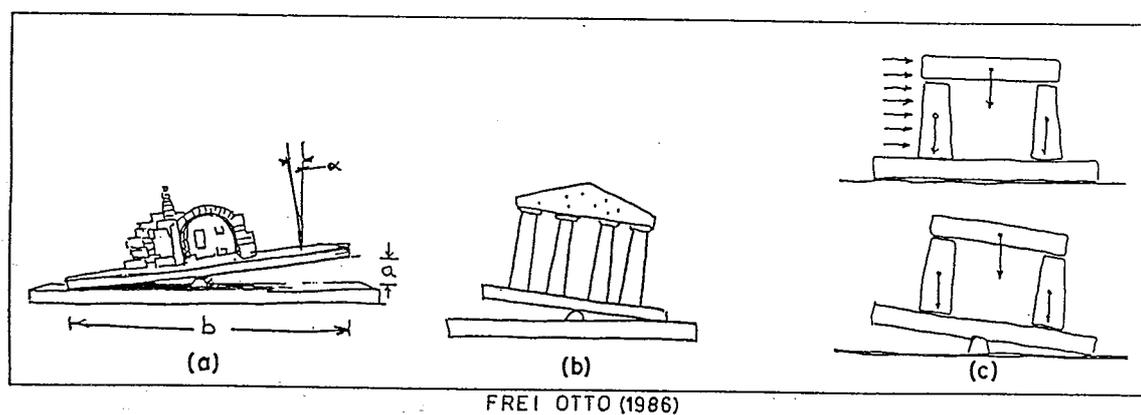


Figura 4.25. Modelos: comprobación a sismo y viento. Método de Frei Otto.

Se puede asimilar la acción del sismo a la de una fuerza horizontal, aplicada en el centro de gravedad del edificio y con un valor del 12% del peso para sismos fuertes, y del 6% y 3% respectivamente para sismos medios o débiles. Para comprobar el efecto de esta fuerza podemos construir un modelo a escala del edificio compuesto de piezas de madera u otro material<sup>40</sup>. La acción de la fuerza horizontal puede realizarse simplemente inclinando la base de apoyo del modelo. El valor de dicha fuerza, en función del peso del modelo,

40. No es necesario, en principio que sea del mismo material, ya que lo importante es la posición relativa de los centros de gravedad. Si debería serlo si existe el riesgo de colapso por deslizamiento, aunque este es muy raro. En este caso la condición sería que el coeficiente de rozamiento en las superficies de unión de los bloques sea igual al del material, piedra etc..., de que se compone el edificio. Para ello puede emplearse otro material, o, mejor, tratar la superficie de contacto de los bloques del modelo, haciéndola más lisa o más rugosa, según se quiera disminuir o aumentar dicho coeficiente. En madera, por ejemplo, puede aumentarse fácilmente simplemente lijando las superficies de contacto con una lija gruesa. El dispositivo más sencillo para conocer de forma aproximada el coeficiente de rozamiento es un simple plano inclinado.

## ANALISIS DE ESTRUCTURAS DE FABRICA

es directamente el de la inclinación de la pendiente medida en tanto por ciento. Incluso para terrenos no-sísmicos es recomendable que esta pendiente pueda alcanzar un valor del 5%, en previsión de movimientos del terreno etc. Además, un pequeño modelo de este tipo permite evidenciar, simplemente someténdole a una ligera vibración, cuáles son los puntos débiles de la estructura. Frei Otto en su contribución (muy interesante aunque fundamentalmente basada en intuiciones personales y no en evidencias documentales), especula con la posibilidad de que los antiguos maestros constructores conocieran esta propiedad de los modelos. Si bien esto parece dudoso, lo que si está documentalmente probado es que se hacían modelos (véase más arriba), a veces de gran escala, y que sí sabían que existía una estrecha relación entre la estabilidad (entendiendo este término en sentido amplio y no-técnico) del modelo y la de la estructura real homóloga.